FORMOLE ANALITICHE

PEL CALCOLO DELLA PASQUA

E CORREZIONE

DI QUELLE DI GAUSS

CON CRITICHE OSSERVAZIONI SU QUANTO HA SCRITTO

DEL CALENDARIO IL DELAMBRE

DI LODOVICO CICCOLINI

E DAL MEDESIMO DEDICATE

A SUA ECCELLENZA

D. LUIGI BUONCOMPAGNI

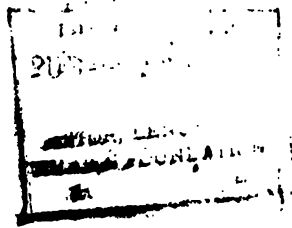
PRINCIPE DI PIOMBINO

EC. EC.

ROMA

MDCCCXVII.

NELLA STAMPERIA DE ROMANIS

Con Licenza de' Superiori.

A SUA ECCELLENZA

D. LUIGI BUONCOMPAGNI

LUDOVISI

PRINCIPE DI PIOMBINO E DI VENOSA

DUCA DI SORA DI MONTEROTONDO

EC. EC.

LODOVICO CICCOLINI.

Non senza soddisfazione, mi persuado io, che V. E. vedrà onorata, di qualche modo, in questo mio scritto, la santa memoria del glorioso Pontefice Gregorio XIII, ornamento cospicuo della già da più secoli chiara prosapia de' Buoncompagni; imperciocchè tanto si distinse Egli nelle lettere, nelle scienze, e nella

politica, che riuscirebbe forse impossibile il poterlo dire. Ed essendo, che l'esempio di Avo cotanto illustre seguitiate pur Voi, mercè dello studio nelle scienze e nella letteratura, non avrete certo a maravigliarvi, che io giudicassi conveniente l'offerirvi questa mia opericciola: senza curar di ridir per quant' altri titoli io avessi dovuto farlo. Pongo fra i molti quello di goder da più tempo la Vostra protezione, la quale desidero, che vogliate mantenermi ora tanto più, ch' io fo palese alle lettere, quanto me lo rechi ad onore.

Roma li 15 Ottobre 1817.

il principe è morto li 9 maggio 1841.
Allg. Zeit. 19 u. 22 Mai. —

P R E F A Z I O N E.

Chiunque si sia applicato per poco allo studio della istoria della misura del tempo presso le antiche nazioni de' Babilonesi, de' Caldei, degli Egizj, dei Greci, e Romani non meno che presso le moderne nei secoli successivi, e a noi più vicini, non solo avrà potuto conoscere l'assoluta necessità che allora v'avea di fissare un modo di calendario, il quale servir dovesse al regolamento dei tempi, e a quel della vita, e della civil società, ma avrà eziandio osservato non raro, che dalla imperfezione sua un tempo, è da ripeter l'origine di tante dubbiezze, ed oscurità che involgono le vecchie istorie. Forza è di convenire frattanto che l'antica consuetudine della chiesa fisamente mantenuta nei tempi trascorsi, e fatta sicura pel tempo avvenire circa il tempo della celebrazion della pasqua, legato esso tempo coll' equinozio di marzo, e colla XIV luna del primo mese, ha principalmente influito all' effetto del calendario; intanto che abbiano dovuto gl' ingegni dedicarsi viemaggiormente allo studio dei moti del sole, e della luna, onde applicarli poi all' inchiesta suddivisata. Nulla pertanto non è egli a maravigliare se dopo la correzione dell' anno di Giulio Cesare, tanto Eusebio Vescovo di Cesarea incombensato dai Padri del Concilio

Niceno nel 325 dell' era cristiana, quanto e Vittorio, e Dionisio il piccolo, e il V. Beda, e altri famosi uomini avendo più e più volte tentato diverse strade affin di trovare una regola certa da legare i moti insieme del sole, e della luna, e così computare i tempi, mai non vi sien potuti riuscire compiutamente. Parve adunque serbato alla gloria di Gregorio XIII, il darla fuori la prima volta: ed egli fu che al comun desiderio soddisfece pel primo; mentre non solo nel 1582 *l' antico calendario emendò ma a quello uno nuovo, e perpetuo sostituì dove tanto con ingegno i moti del sole, e della luna collegati vi si ritrovano, che mai dagli uomini imparziali, e discreti non potrà per questo venir lodato bastantemente. Infinita soddisfazione ne mostrarono in fatti i più grandi d'Europa, e tanto, per la facilità delle regole venne esso ammirato, che le opposizioni mossegli contro dallo Scaligero, dal Vieta, e da altri appena venute in luce furono confutate, e represse. Senonchè, secondo, che nelle quistioni scientifiche veggiamo avvenire per l' ordinario, le parti contrarie non si tacque ciò non ostante, e di tale importanza la mate ria giudicarono che più di cento penne intorr ad essa andarono esercitandosi. Altrettante e p opere adunque, come si trae dalla* Bibbliogra Astronomica del de la Lande, *si videro venir fu ri nell' ultimo secolo, e fin de' Gassendi, de' Ca*

sini, Manfredi, Bianchini, e altri non pochi, i quali della dottrina del calendario essendosi occupati, manifestarono chiaramente qual alto concetto facessero di lei. Ma più è ancora che io aggiunga. Negli ultimi tempi, ed a giorni nostri, due fra gli Astronomi, e Mattematici più famosi trattarono essi pure lo stesso argomento, ma con metodo affatto nuovo; usando cioè dell' analisi, cosa non mai per lo innanzi praticata da altri. Fu il primo il Dottor Gauss, il quale in una memoria *inserita nella mensuale corrispondenza del celebre Barone di Zach* (*alla pag.* 129 *e segg. della seconda parte del* 1800.) *dette una elegantissima formola analitica per la determinazion della Pasqua; l' altro fu il Signor Delambre che dal* 1813 *al* 1816 *per tre volte scrisse sul calendario. E poi, che grande è la stima che debbe aversi da ognuno di questi due sommi ingegni; non poco mi vanto di ammirarli pur io. Spicca per modo la scienza del Gauss nelle opere sue, che non può esser che altri non ne resti maravigliato; siccome di tanto vantaggio della scienza dell' astronomia, e sono, e furono così lo zelo, come l' assiduità del Delambre, che appena è che si potesse ridire. Quanto alla formola nondimeno del Gauss, m' accorsi io fin dal* 1813, *non esser di quella generalità ch' egli credette. E qui mi sia permesso accennare in che la formola del Gauss io mi creda man-*

cante. In prima noteremo non distendersi essa oltre ad un certo termine, e fino al quale soltanto si possa usare senza pericolo di cadere in equivoco: dico fino all' anno 4199 dell' era cristiana. La Pasqua, ad esempio, del 4200 debbe cader ai 20 d' aprile, in vece che ai 13 secondo che dà la formola. E quantunque siavi un lasso di tempo considerabilissimo dal corrente anno al 4199, tuttavia non è da comportarsi dagli studiosi dell' analisi di lasciarla così imperfetta, tanto più che non possiamo dubitar dello scopo dell' autor suo allora che il pubblicò, il quale scopo fu quello certamente di darne una regola certa di determinare la Pasqua di un anno qualunque, in qualunque secolo; di che può essere una prova ch' egli medesimo ne facesse l' applicazione all' anno 4763, posteriore di più secoli del 4199. Ora essendo questa materia stata di tanto peso innanzi agli occhi dei mattematici più famosi, secondo che pur dissi di sopra, incominciai fino dal mentovato anno 1813 a notare e correggere lo sbaglio da me scoperto. Senonchè distratto dalle fatiche cui mi tenne obbligato l' incarico d' Astronomo, e insieme di Direttore della Specola di Bologna intorno a 15 anni, non ebbi mai l' agio di troppo attendere al prefato lavoro: finochè sciolto dai legami di quell' uffizio, a me per altro gravoso non mai, mi ridussi da capo a considerare se ci avesse

pure una via da trattar l' argomento con metodo generale , ed insiem rigoroso ; per modo nondimeno che dalle regole Gregoriane non venisse punto ad allontanarsi. E ciò con tanto maggiore studio intrapresi , appena venni ad accorgermi, come l' istessa formola del Gauss avea dato luogo presso alcuni a de' falli non lievi, opposti dirittamente alla dottrina del Calendario Gregoriano; e che sopra tutto abbisognavano di correzione alcune delle cose scritte dal Signor Delambre , e nel suo compendio d' astronomia , e nella sua astronomia teorica , e pratica , e nella conoscenza de' tempi pel 1817. Nè invano fu il mio tentativo, conciosiachè mi avvenisse di discoprire più avanti ancora di quello mi fossi proposto nel mio principio, non che di ridurre a perfetta analisi quel che dal Delambre non era stato detto che trasformando le regole Gregoriane in simboli algebraici.

Questo è quello impertanto che verrò io esponendo partitamente ne' quattro opuscoli che seguono, il primo de' quali conterrà le formole analitiche della lettera domenicale , dell' epatta , e di altre quantità ancora, le quali maravigliosamente servono alla determinazione della pasqua di qualunque anno, in qualunque secolo. Il quarto opuscolo , nel quale si dirà e delle feste mobili, e di che modo si adoperino ad altri usi le lettere domenicali e l' epatte , e vi si parlerà al-

tresì dell' uso di varj cicli e delle respettive formole loro, dee esser riguardato come un' appendice all' opuscolo primo, dove il discorrer di tai materie sarebbe stato fuori di luogo, e tuttavia non eran esse da ommettersi per la stretta relazione che hanno colla scienza del calendario. Darò nel secondo opuscolo un ampia analisi della Memoria del Dottor Gauss sul computo della Pasqua, *per mezzo di schiarimenti, di giunte, e di correzioni, il tutto per via di note alla libera traduzione di essa: e nel terzo tratterò alquanto più particolarmente delle cose del Signor Delambre, cui non mi posso tenere che non rimproveri in qualche modo la non curanza, e quasi ch' io non dissi il dispregio, ch' ei dimostrò pel calendario gregoriano.*

Roma li 13 *Maggio* 1817.

Pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE
46	12	di *c*	di *e*
64	ult.	che alla	alla *solamente*
82	2	xhiaro	Chiaro
86	6	madernale	madornale
135	4	1, 9, 4	1, 14, 9

FORMOLE
ANALITICHE
PEL CALCOLO DELLA PASQUA.

CAP. I

Di certe espressioni algebraiche, delle quali ci varremo continuamente in questo scritto.

Seguendo l'esempio del chiarissimo Delambre, noi faremo uso di due nuove, ed utili algebraiche espressioni, colla prima delle quali indicheremo il quoto di una quantità divisa per un'altra, non curato il residuo che avvanza dalla loro divisione, per mezzo di una frazione chiusa entro parentesi, a destra della quale siavi notata inferiormente la lettera i; in conseguenza colla quantità $\left(\frac{A}{B}\right)_i$ intendiamo il quoto espresso in numeri interi che nasce dalla divisione della quantità A per la quantità B, negletto l'avvanzo.

Ex. gr. $\left(\frac{25}{7}\right)_i = 3$, $\left(\frac{17}{30}\right)_i = 0$.

Riflettuto poi che ogni numero è divisibile per l'unità, e che le quantità numeriche decimali sono frazioni modificate, delle quali facciamo più, e più volte uso in quest' operetta, abbiamo impiegato ancora, ed assai spesso la lettera i a destra inferiormente delle parentesi contenenti quantità decimali, così ex. gr. troveremo $(0{,}32K - 4{,}48)_i$ dove se sia $K = 18$, sostituendo avremo $(0{,}32\,K - 4{,}48)_i = (5{,}76 - 4{,}48)_i = (1{,}28)_i = \left(\frac{128}{100}\right)_i = 1.$

Colla seconda indicheremo il residuo intero, e positivo di una quantità divisa per un' altra, ommesso il quoto espresso in numeri interi risultante dalla divisione

loro, parimente in forma di frazione entro parentesi, avente però a destra inferiormente la lettera r. Così la quantità $\left(\frac{A}{B}\right)_r$ vuol significare il residuo che si trova dividendo la quantità A per la quantità B, trascurato il quoto espresso in numeri interi, che dà la divisione. Ex. gr. $\left(\frac{25}{7}\right)_r = 4$, $\left(\frac{17}{30}\right)_r = 17$, come pure

$$\left(\frac{35,44}{30}\right)_r = \left(\frac{(35,44)i}{30}\right)_r = 5, \left(\frac{0,17}{30}\right)_r = 0.$$

Un così fatto metodo di notare i resti delle divisioni negletti i quoti interi; ed i quoti interi negletti i resti, accorcia maravigliosamente il discorso, e aggiugne molta semplicità, e chiarezza all' equazioni algebraiche che avremo a trattare, attesa la natura delle quantità che vi s' impiegano, siccome manifestamente apparirà in processo del mio discorso.

E innanzi di entrare nella materia, noi osserveremo sulle due espressioni $\left(\frac{A}{B}\right)_i$, $\left(\frac{A}{B}\right)_r$ diverse cose, le quali serviranno come di fondamento a molte operazioni analitiche, ed aritmetiche da noi poste in uso, e sono le seguenti.

Nelle quantità che avremo occasione di calcolare della forma medesima dell' espressioni universali $\left(\frac{A}{B}\right)_i$, $\left(\frac{A}{B}\right)_r$ il denominatore è sempre monomio, ed il numeratore è monomio o polinomio, secondo la natura de' problemi a risolvere.

Facendosi $\left(\frac{A}{B}\right)_r = b$, si avrà $\left(\frac{A}{B}\right)_i = \frac{A-b}{B}$, ed $\frac{A-b}{B}$ risulterà costantemente un numero intero. Abbiasi ex. gr. $\left(\frac{25}{7}\right)_r = 4$, sarà $\left(\frac{25}{7}\right)_i = \frac{25-4}{7} = 3$.

Il valore di $\left(\frac{A}{B}\right)_r$ è sempre rigorosamente parlando uguale ad uno dei valori contenuti nei limiti da zero a $B - 1$; ciò non ostante quando si abbia $\left(\frac{A}{B}\right)_r = 0$, avrà luogo ancora in alcune circostanze il valore di B in vece dello zero, tantochè si può avere $\left(\frac{A}{B}\right)_r = 0$ ovvero B, la qual cosa ogni volta che avverrà, vorremo che altri l' avverta.

Se abbiasi $\left(\frac{A}{B}\right)_r = 0$, sarà ancora $\left(\frac{-A}{B}\right)_r = 0$, ed aggiugnendo ai numeratori, o sottraendo da essi le quantità B, nB, non si muta il residuo zero. Avremo pertanto $\left(\frac{A}{B}\right)_r = 0 = \left(\frac{\pm A \mp B}{B}\right)_r = \left(\frac{\pm A \mp nB}{B}\right)_r$.

Così $\left(\frac{21}{7}\right)_r = \left(\frac{\pm 21 \mp 7}{7}\right)_r = \left(\frac{\pm 21 \mp 7n}{7}\right)_r = 0$.

In tutti gli altri valori di $\left(\frac{A}{B}\right)_r = 1, 2, 3, \ldots B - 1$ parimente aggiungendo al numeratore il denominatore B od un multiplo di B, non si muta il residuo dell'espressione $\left(\frac{A}{B}\right)_r$ quindi $\left(\frac{A}{B}\right)_r = \left(\frac{A+B}{B}\right)_r =$

$$\left(\frac{A+nB}{B}\right)_r ; \left(\frac{25}{7}\right)_r = \left(\frac{25+7}{7}\right)_r = \left(\frac{25+7n}{7}\right)_r = 4.$$

Ma sottraendo da A le dette quantità B, nB, ove sia $B > A$, od $nB > A$ l'espressione $\left(\frac{A}{B}\right)_r$, cambiata in $\left(\frac{A-B}{B}\right)_r$ od in $\left(\frac{A-nB}{B}\right)_r$ darà un residuo negativo che non ha luogo in questi calcoli, ma vedrassi nel cap. seg. cosa è da fare, quando s'incontrino residui negativi.

Sommandosi, o sottraendosi due residui della stessa denominazione, come $\left(\frac{A}{B}\right)_r$ ed $\left(\frac{A'}{B}\right)_r$ si avrà sempre

$$\left(\frac{A}{B}\right)_r \pm \left(\frac{A'}{B}\right)_r = \left(\frac{A \pm A'}{B}\right)_r.$$

CAP. II

Formole analitiche dell' epatta, e della lettera domenicale, le quali porgono un mezzo facile e sicuro di calcolar la pasqua di qualunque siasi dato anno, tanto nel calendario giuliano, quanto nel calendario gregoriano senza punto allontanarsi dalle regole da Gregorio XIII ordinate.

Nel calendario giuliano chiamando L la lettera domenicale, E l' epatta, H l' anno dato, e facendo $\left(\frac{H}{19}\right)_r = a$, $a + 1 = N$, $\left(\frac{H}{4}\right)_r = b$, $\left(\frac{H}{7}\right)_r = c$, si avrà costantemente

$$L = \left(\frac{3 + 2b + 4c}{7}\right)_r \ldots\ldots 1$$

$$E = \left(\frac{11N - 3}{30}\right)_r \ldots\ldots\ldots 2$$

Esempio per lo anno 4200

Calcolo della lettera domenicale.

$$b = \left(\frac{H}{4}\right)_r = \left(\frac{4200}{4}\right)_r = 0,\ c = \left(\frac{H}{7}\right)_r = \left(\frac{4200}{7}\right)_r = 0$$

$$L = \left(\frac{3 + 2b + 4c}{7}\right)_r = \left(\frac{3 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{7}\right)_r$$

$= \left(\frac{3}{7}\right)_r = 3 = C$. ch' è la terza delle sette lettere domenicali.

Calcolo dell'epatta. $a = \left(\frac{H}{19}\right)_r = \left(\frac{4200}{19}\right)_r = 1$, $a + 1 = 2 = N$.

$$E = \left(\frac{11N - 3}{30}\right)_r = \left(\frac{19}{30}\right)_r = 19 = \text{XIX}.$$

Calcolo della pasqua: si cerchi nella tavola posta subito dopo il Cap. VIII., cavata dal calendario perpetuo, dagli 8 marzo ai 5 aprile a qual giorno del mese corrisponda l'epatta calcolata XIX, e trovato il 12 marzo, gli si aggiunga 13 giorni, si avrà li 25 di marzo, la pasqua dee cadere nel primo giorno dopo li 25 di marzo, al quale corrisponde la lettera domenicale *C*, ossia ai 28 di marzo. Si aggiungono 13 giorni per avere il decimoquarto della luna di pasqua, la quale si celebra nella domenica appresso.

Nel calendario gregoriano, chiamando E' l'epatta, L' la lettera domenicale, *K* il numero dei secoli compiuti dell' anno dato *H*, e facendo come sopra $\left(\frac{H}{4}\right)_r = b$, $\left(\frac{H}{7}\right)_r = c$, ed inoltre $\left(\frac{K}{4}\right)_r = b'$, $\left(\frac{K}{7}\right)_r = c'$, si ha sempre $L' = \left(\frac{1 + 2(b + b') + 4c + 6c'}{7}\right)_r \quad \ldots 3$

$$\text{ed } E' = \left(\frac{11N - \left(\frac{3K - 5}{4}\right)_i + \left(\frac{8K - 112}{25}\right)_i}{30}\right)_r \quad \ldots 4$$

$$= \left(\frac{11N - (0,75k - 1,25)_i + (0,32k - 4,48)_i}{30}\right)_r \ldots 5$$

ovvero

$$E' = \left(\frac{11N - (0,43K + 0,25b' + 3,44)_i}{30}\right)_r \quad \ldots 6$$

$$= -\left(\frac{(19N + 0,43K + 0,25b' + 3,44)i}{30}\right)_r \quad \ldots 7$$

$$= 30 - \left(\frac{(19N + 0,43K + 0,25b' + 3,44)}{30}\right)_r \quad \ldots 8$$

$$= 30n - (19N + 0,43K + 0,25b' + 3,44)i \quad \ldots 9$$

Nota bene che dalle formole contrassegnate dai numeri 4, 5, 6, 7 l'epatta gregoriana può riuscir negativa, laddove sappiamo che di sua natura è positiva. A renderla tale pertanto in tai casi gli si aggiugne B, nB, ossia 30, $30n$ secondo il bisogno, ch'è lo stesso di prendere il complemento a 30 od a $30n$ dell'epatta negativa avuta considerata come positiva; e di ciò daremo la ragione più sotto.

Esempio per lo stesso anno 4200. Giova quì badare che l'epatta * risponde ugualmente all'epatta zero, ed all'epatta trenta.

Calcolo della lettera domenicale ... $c' = \left(\frac{K}{7}\right)_r =$

$\left(\frac{42}{7}\right)_r = o$, $b' = \left(\frac{K}{4}\right)_r = \left(\frac{42}{4}\right)_r = 2$, abbiamo inoltre $c = o$, $b = o$, sostituendo adunque questi quattro valori di b, b', c, c', nella formola (3) di

$$L' = \left(\frac{1 + 2(b + b') + 4c + 6c'}{7}\right)_r \text{ avremo}$$

$$L' = \left(\frac{1 + 2(0 + 2) + 4.0 + 6.0}{7}\right)_r = \left(\frac{5}{7}\right)_r = 5 = E$$

ch'è la quinta delle sette lettere domenicali.

Calcolo dell' epatta . . . Avremo $N = 2$, $K = 42$, e perciò sostituendo i valori di N, K nella formola (4) di

$$E' = \left(\frac{11\,N - \left(\frac{3\,K - 5}{4}\right)_i + \left(\frac{8\,K - 112}{25}\right)_i}{30}\right)_r$$

sarà
$$E' = \left(\frac{11.2 - \left(\frac{3.42 - 5}{4}\right)_i + \left(\frac{8.42 - 112}{25}\right)_i}{30}\right)_r$$

$$= \left(\frac{22 - 30 + 8}{30}\right)_r = o = {}^*$$ ch'è l'epatta notata ai 31 di Marzo nella tavola soprallegata.

Calcolo della pasqua . . . $E' = {}^* =$ 31 marzo; 31 marzo più 13 giorni = 13 aprile, ed $L' = E$, darà nella citata tavola la pasqua ai 20 aprile.

Si farà attenzione allorchè si ottenga dal calcolo venticinque per epatta, se abbiasi $N > 11$, di prendere il 4 aprile in luogo del 5, poichè in tal caso si fa uso dell' epatta 25 num. arab., e non dell' epatta XXV num. rom.

Saranno da noi dati altri esempi dopo di aver dimostrato le formole precedenti. Vedremo inoltre al Cap. VII, come possa supplirsi a memoria alla tavola summentovata, ch' è porzione del calendario perpetuo gregoriano. Per ultimo al Cap. VIII, esporremo un metodo analitico da servire in luogo della tavola suddetta.

Avvertimento .

Queste formole sono generali, e lo saranno in perpetuo. Con ciò vogliam dire ch' esse respettivamente esprimono per un anno qualunque la lettera domenicale, e l'epatta secondo le regole de' due calendari giuliano e gregoriano: In ognuna delle formole, per esempio, dell' epatta gregoriana si contiene per intero la nota tavola spasa dell' epatte per la quale si determina l' epatta di un anno qualunque.

Consiegue da ciò che le strane ed inusitate equazioni, delle quali ne' secoli ben lontani da noi, potrà abbisognare la tavola suddetta per gli errori che si scoprissero nelle quantità dell' equazioni solare e lunare dai riformatori impiegate, dovranno esser fatte alle nostre formole ancora. Nè ciò sminuisce in verun modo il pregio loro, mentre senz' alterarne la forma, con somma facilità verranno allora esse corrette, o aggiugnendo $\pm$ 1, 2, 3, 4 ec., secondo le correzioni seguite, ai risultamenti del calcolo loro per gli anni di quei secoli, o mutando al bisogno e convenientemente i termini od i numeri $3, 1, -\frac{5}{4}, -\frac{112}{25}, -3, 44$ che in esse formole respettivamente si contengono.

Ed appunto parleremo noi di una di tali correzioni già conosciuta, che avrà luogo nell' 8200, nell' osservazione che faremo al luogo che si trova alla pag. 716. l. 28. dell' Astron. teor. prat. del Delambre. Da tutto ciò si concluda, che il computo della lettera domenicale, e dell' epatta per ottenerne la pasqua pe' secoli remoti, fatto colle regole fin quì esposte, sarà giusto per più migliaja d' anni, o finchè la chiesa non giudicherà oppor-

tuno di fare un' istantanea eccezione alle medesime, e quindi fallace, se alle formole non si applichi la stessa eccezione.

Ma quando che le formole abbiano un dì ad esser così corrette, ripiglierà alcuno, non torna meglio di servirsi di quelle del Gauss, le quali a dir vero sono semplicissime? A tale rispondo, che la correzione di quelle di Gauss occorrerebbe assai più sovente, e molto prima di quell' epoca: riuscirebbe perciò difficilissima da fare, ed a renderla piana, il partito migliore sarebbe quello di adattarle prima, esattamente, alle regole del calendario gregoriano, ma di questo potrà farsi giudizio più rettamente, se verran lette le note da noi compilate alla memoria del Gauss.

Intanto sia qui detto una volta per sempre, che quelle maniere di dire, quegli esempi, e quei calcoli che si troveranno in quest' operetta, e che avranno relazione a tempi oltre modo remoti da noi debbonsi considerare dipendenti del tutto dalle attuali regole gregoriane, e che quantunque queste, siccome teniam per fermo, non abbian mai pel tempo avvenire bisogno di cambiamento veruno, tuttavia essendo, che coll' andar de' secoli sien per esser soggette a qualche momentanea equazione di uno o più giorni, il che vien confermato altresì dallo stesso Clavio, nè altera punto la perpetuità del calendario e delle formole suddette, perciò a queste formole ancora dovrà farsi allora l' equazione medesima.

CAP. III

Dimostrazioni delle due precedenti formole (1, 3) *appartenenti alla lettera domenicale dei due calendarj, respettivamente, e prima di*

$$L = \left(\frac{3 + 2b + 4c}{7}\right)_r \dots \quad 1$$

Siano le lettere domenicali $A, B, C, D, E, F, G =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ovvero zero $= L$. Nell'anno primo dell'era nostra la lettera domenicale fu $B = 2$, perchè quell'anno principiò in sabato, lo stesso anno, per esser comune, dovette del pari terminare in sabato, dunque nell'anno secondo, la lettera domenicale fu $A = 1$, nel terzo per la ragione medesima fu $G = 0$, nel quarto fu $F = 6$, ma l'intercalazione del bisesto cambiò ai 24 febraro $F = 6$ in $E = 5$, vale a dire che un anno bisestile qualunque nel calendario giuliano ha due lettere domenicali, la prima serve fino ai 24 febrajo, l'altra al resto dell'anno, e la formola nostra dà sempre l'ultima delle due negli anni bisestili, come appunto si richiede nel computo della pasqua. Nell'anno quinto si avrà $D = 4$, e così continuando per gli anni seguenti 6, 7, 8, 9, ec. si avranno respettivamente le lettere domenicali $C, B, A\,G, F$ ec. $=$ 3, 2, 1 0, 6 ec. Si rende manifesto pertanto come l'aumento progressivo 1, 2, 3, 4, ec degli anni dell'era cristiana sommato col numero de' bisestili respettivamente contenutivi sia sempre uguale al numero delle retrogradazioni che seguono contemporaneamente, e come in giro nelle sette lettere domenicali. Di qui è che se all'anno H aggiugniamo il

numero de' bisestili $\left(\frac{H}{4}\right)_i$ occorsi fino all' anno H inclusive, ed inoltre la lettera domenicale L dello stesso anno H, così retrogradando ottenuta, il residuo della somma $H + \left(\frac{H}{4}\right)_i + L$ divisa per sette, risulterà una quantità costante, qualunque sia il valore di H: e aggiunta alla stessa somma una incognita x che la renda esattamente divisibile per sette noi avremo

$\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i + x + L}{7}\right)_r = 0$, di modo che determinando x si renderà necessariamente nota la lettera domenicale L. Possiamo con facilità determinar x applicando la formola suddetta all' anno primo, pel quale abbiamo già $H = 1$, $\left(\frac{H}{4}\right)_i = 0$, $L = 2$, come si è poco fà osservato, dunque $\left(\frac{1 + 0 + x + 2}{7}\right)_r = 0$, ci darà $\left(\frac{1 + 4 + 2}{7}\right)_r = 0$, ed $x = 4$, onde per trovare la lettera demenicale d' un dato anno H nel calendario giuliano, potremo servirci generalmente della formola

$\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i + 4 + L}{7}\right)_r = 0$, dalla quale conoscendosi già che i limiti de' diversi valori di L, sono tra zero e 6, facilmente si caverà quello appartenente all' anno H.

A simplicizzare, e a maggiormente rendere elegante la medesima, si faccia $\left(\frac{H}{4}\right)_r = b$, $\left(\frac{H}{7}\right)_r = c$, al-

lera sarà $\left(\frac{H}{4}\right)_i = \frac{H-b}{4}$, e sostituendo $\frac{H-b}{4}$ al $\left(\frac{H}{4}\right)_i$ nella formola precedente, avremo $\left(\frac{H + \frac{H-b}{4} + 4 + L}{7}\right)_r = 0$: a toglier poi la frazione dal numeratore aggiungiamo ad esso $\frac{3H-3b}{4}$ multiplo di 7, così riducendo si avrà $\left(\frac{3H-2b+4+L}{7}\right)_r$ $= 0$, e sottraendo $3H-3c$ parimente multiplo di 7, essa diverrà $\left(\frac{3c-2b+4+L}{7}\right) = 0$, sottratto finalmente il numeratore di quest'ultima da $7c+7$, si avrà $\left(\frac{3+2b+4c-L}{7}\right)_r = 0$, e conseguentemente $L = \left(\frac{3+2b+4c}{7}\right)_r$ ch'è ciò che si cercava di dimostrare.

Dimostrazione della formola di

$$L' = \left(\frac{1+2(b+b')+4c+6c'}{7}\right)_r \ldots 3.$$

Noi considereremo dapprima come l'effetto degli anni bisestili sulle lettere domenicali si è d'impiegare successivamente con ordine retrogrado cinque lettere diverse in quattro anni, laddove soppressone il bisestile, basterebbero quattro; così abbiamo trovato per gli anni 6, 7, 8, 9 di Cristo le cinque lettere *C*, *B*, *A G*, *F*, ma se l'anno otto, fuor dell'ordinario, fosse stato comune, sarebbero state quattro solamente, cioè *C*, *B*, *A*, *G*. La soppressione adunque de' bisestili centenari come si fa

CAP. IV

Dimostrazione della formola dell' epatta annuale del calendario ecclesiastico giuliano, ossia di

$$E = \left(\frac{11\,N - 3}{30}\right)_r \ldots 2$$

Confrontando la disposizione dei numeri d' oro del calendario giuliano, colla disposizione dell' epatte del calendario gregoriano, fia agevole il discuoprire la legge che osservano nella corrispondenza loro, di maniera che dato il numero d' oro di un anno H potrà facilmente determinarsi per quello l' epatta dello stesso anno H. Ecco pertanto qui contro l' epatte, e i numeri d' oro pei giorni del mese dagli 8 marzo ai 5 di aprile; come pure la disposizione ordinata degli stessi numeri d' oro 1, 2, 3, 4, ec. coll' epatte loro corrispondenti, le quali potranno ancora esprimersi come nell' ultima colonna senza che sia il loro valore cambiato, e dove i numeratori procedono in progressione aritmetica colla differenza di 11 dall' uno all' altro. Ora multiplicando per 11 i numeri d' oro corrispondenti, e diminuendo il prodotto loro di 3, si ottengono giustamente gli stessi numeratori dell' epatte così espresse. Dunque chiamando N il numero d' oro, un' epatta qualunque nel calendario giuliano, risulterà uguale ad $\left(\frac{11\,N - 3}{30}\right)_r$ ch' era la cosa da dimostrarsi.

Dalla precedente dimostrazione si deduce, che corrispondendo diciannove epatte soltanto ai numeri d' oro, le rimanenti, cioè II, V, VII, X, XIII, XVI, XVIII, XXI, XXIV, 25, XXVII, XXIX, sono affatto inutili al calendario giuliano.

	Gior.	Num. d'oro	Epatte.
Marzo	8	16	XXIII
	9	5	XXII
	10		XXI
	11	13	XX
	12	2	XIX
	13		XVIII
	14	10	XVII
	15		XVI
	16	18	XV
	17	7	XIV
	18		XIII
	19	15	XII
	20	4	XI
	21		X
	22	12	IX
	23	1	VIII
	24		VII
	25	9	VI
	26		V
	27	17	IV
	28	6	III
	29		II
	30	14	I
	31	3	*
Aprile	1		XXIX
	2	11	XXVIII
	3		XXVII
	4	19 . 25	XXVI
	5	8 XXV.	XXIV

N.	E.	E.
1	VIII	$\left(\frac{8}{30}\right)_r$
2	XIX	$\left(\frac{19}{30}\right)_r$
3	*	$\left(\frac{30}{30}\right)_r$
4	XI	$\left(\frac{41}{30}\right)_r$
5	XXII	$\left(\frac{52}{30}\right)_r$
6	III	$\left(\frac{63}{30}\right)_r$
7	XIV	$\left(\frac{74}{30}\right)_r$
8	XXV	$\left(\frac{85}{30}\right)_r$
9	VI	$\left(\frac{96}{30}\right)_r$
10	XVII	$\left(\frac{107}{30}\right)_r$
11	XXIIX	$\left(\frac{118}{30}\right)_r$
12	IX	$\left(\frac{129}{30}\right)_r$
13	XX	$\left(\frac{140}{30}\right)_r$
14	I	$\left(\frac{151}{30}\right)_r$
15	XII	$\left(\frac{162}{30}\right)_r$
16	XXIII	$\left(\frac{173}{30}\right)_r$
17	IV	$\left(\frac{184}{30}\right)_r$
18	XV	$\left(\frac{195}{30}\right)_r$
19	XXVI	$\left(\frac{206}{30}\right)_r$

CAP. V

Dimostrazione delle formole (4, 5) dell' epatta annuale del calendario gregoriano, e prima di

$$E' = \left(\frac{11N - \left(\frac{3K-5}{4}\right)_i + \left(\frac{8K-112}{25}\right)_i}{30}\right)_r \ldots 4.$$

Innanzi che si venga a dimostrare per noi la bontà di questa formola, faremo osservare, come questa si ottenga correggendo l' epatta del calendario giuliano, presso a poco, come ottenemmo la formola della lettera domenicale pel calendario gregoriano, correggendo quella del giuliano; differendo però in questo che all' epatta E, oltre l' equazione solare, si dee applicare ancora l' equazione lunare. Di maniera che si rende necessario di cercare due espressioni analitiche che rappresentino respettivamente le due equazioni suddette, od una sola che insieme, ed unitamente le comprenda; cosa alla quale non v' ebbe, chc io mi sappia, alcuno che riuscisse perfino a quì.

Il Signor Delambre fè l' equazione solare $= K - 16 - \left(\frac{K-16}{4}\right)_i$, nella quale non sono computati i dieci giorni ommessi nel 1582, ma soltanto il numero de' bisestili soppressi fino al secolo K inclusive, e l' equazione lunare fece che fosse $= \left(\frac{K-15-F}{3}\right)_i$ dove $F = \left(\frac{K-17}{25}\right)_i$ ultimo risultato di tanti suoi tentativi; cosicchè egli trovò l' epatta $E' = \left(\frac{11N-10}{30}\right)_r$

$$- (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i + \left(\frac{K-15-F}{3}\right)_i$$

equazione in vero troppo prolissa, e che a parlar francamente, ancorchè giusta, fa onore assai poco alla dottrina dell' analisi, non essendo quasi, che la mera traduzione in algebra delle regole del calendario gregoriano.

Intanto stimo opportuno di qui esporre passo passo le tracce che mi han guidato alla formola da dimostrarsi, e il semplice racconto di ciò ne varrà ancora d' un' ampia prova di quella.

La prima correzione lunare pertanto che i riformatori del calendario fecero ai numeri d' oro, o all' epatte loro corrispondenti fu di tre giorni per una sol volta. Si avvidero essi bensì che a quel tempo i noviluni anticipavan di quattro giorni, vale a dire che di altrettanto s' erano portati verso il principio del mese comparativamente a quelli indicati dai numeri d' oro, o dall' epatte, ma volendo correggersi, fecero la correzione di soli tre giorni trasportando pure cioè di tre giorni i numeri d' oro verso il principio del mese, per esser maggiormente sicuri di tener dietro alle regole stabilite dalla Chiesa relative al tempo della celebrazion della pasqua.

Ad evitare un simile sconcio pel tempo avvenire, stabilirono una equazione lunare periodica; e il periodo di lei è composto di 25 secoli ne' quali s' incontrano otto equazioni, ciascheduna di un giorno, le prime sette ad ogni 300 anni, l' ultima, o l' ottava 400 anni dopo impiegata la settima. Comincia il periodo lunare nel 1800, e nello stesso 1800 si dee considerare come terminato il periodo precedente, ancorchè non abbia avuto il suo effetto, in guisa tale che l' equazione lunare adoperata nel 1800, si dee risguardare appartenente al pre-

cedente periodo. Che però essendo, che la prima equazione lunare nel calendario gregoriano, avesse luogo nel 1800, quantunque essa appartenga all'ultima equazione del periodo precedente, niente osta, anzi giova il considerarla non solo come prima equazione lunare impiegata nel calendario gregoriano, ma ancora come prima del periodo di secoli 25, la quale ripeta il principio dell'effetto suo fino dal 1400, secondo che veramente si vede notato ancora nelle tavole del Clavio. Così le otto equazioni lunari saranno impiegate la prima dopo 400 anni dalla sua origine, e le altre sette ogni 300 anni, e nello stesso modo ne' successivi periodi. Fatta questa modificazione al periodo lunare, la quale punto non muta la quantità dell'equazione lunare d'applicarsi all'epatta per qualunque siasi dato secolo, ho potuto assai con facilità trovar una molto compendiosa espressione analitica di lei secondo che siegue.

Nel 1400 fu l'equazione periodica lunare $= 0$
Nel 3900 sarà . . . . $= 8$

Multiplicando il numero de' secoli 14.°, 39.° pel coefficiente indeterminato P, ed aggiugnendo una costante C, ho avuto le due equazioni algebraiche seguenti..

$$14\,P + C = 0$$
$$39\,P + C = 8$$

sottraendo la prima dalla seconda si ha $25\,P = 8$

$$P = \frac{8}{25}\text{, d'onde } 14\,P = \frac{112}{25}$$

Inoltre si ha dalla prima $C = -14\,P = -\frac{112}{25}$

e chiamando K il secolo dato si avrà generalmente l'e-

quazione lunare periodica $= \left(\frac{8K - 112}{25}\right)_i$.

Sperimentata questa formola col calcolo sopra un intero periodo di 25 secoli, l'ho trovata buona, e l'equazione lunare che si ottiene per essa per qualsivoglia secolo *K* corrisponde maravigliosamente alle regole del calendario gregoriano, nella quale però non si comprende, siccome chiaro apparisce, la correzione di tre giorni riferita precedentemente.

Volendo applicare ora lo stesso metodo per trovare la formola dell' equazione solare, giacchè quella di $\frac{3K + b' - 8}{4}$ adoperata da noi nella investigazione della lettera domenicale gregoriana, non è a dir vero troppo semplice, si rende necessario 1.° di prendere i secoli 16.° 20.° in vece dei secoli 14.° 39.°, poichè siccome il secolo 14.° è la radice del periodo di 25 secoli dell' equazione lunare, così il sedicesimo è la radice del periodo di 400 anni, ossia di quattro secoli dell' equazione solare; 2.° di multiplicarli pel coefficiente indeterminato *Q*, aggiugnendo ai prodotti la costante *C'*, nell'istessa maniera che ai prodotti dei secoli 14.°, e 39.° pel coefficiente indeterminato *P*, si aggiunse la costante *C*; 3.° finalmente di fare, per maggior brevità, l' equazione solare nel secolo 16.° = 10 pei 10 giorni ommessi nel 1582, e nel secolo 20.° = 13 pei detti dieci giorni, e pei tre bisestili soppressi nel 1700, 1800, 1900. Così potrassi istituire ad imitazione delle precedenti le due equazioni qui appresso.

$$16\,Q + C' = 10$$
$$20\,Q + C' = 13$$
d'onde $$4\,Q = 3$$
$$Q = \frac{3}{4};\ 16\,Q = 12$$
$$C' = 10 - 16\,Q = 10 - 12 = -2$$

dunque si avrebbe l'equazione solare, chiamando K il secolo dato dalla formola $\left(\frac{3}{4}K - 2\right)_i$. Nondimeno calcolando con questa l'equazione solare per diversi secoli, ho ottenuto risultati falsi in tutti quelli, che non sono divisibili per quattro, il che non dee recar maraviglia, perch' essi non sono realmente espressi nelle due equazioni algebraiche fondamentali, dalle quali fu cavata. Conosciuto però dal calcolo il difetto suo, ch' è di $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{4}$ secondo che $\left(\frac{K}{4}\right)_r = 1, 2, 3$, ho potuto rimediarvi aggiugnendo ad essa la quantità $\frac{3}{4}$, così che la formola $\left(\frac{3}{4}K - 2 + \frac{3}{4}\right)_i = \left(\frac{3K - 5}{4}\right)_i$ dà l'espressione analitica generale, e giusta dell'equazione solare, ed è più semplice della poco fa ricordata $\frac{3K + b' - 8}{4}$, quantunque questa dia sempre l'equazione finita in numeri interi, il che tuttavia opera anche quella, dovendosi sempre aver riguardo alla lettera i, la quale come abbiamo già fin da principio stabilito accenna che deesi prendere il quoto intero, e non curarsi della frazione residua.

Osserveremo al presente ch' essendo state l'epatte disposte nel calendario con ordine retrogrado per quel che è de' giorni del mese, onde indicassero i noviluni, ed es-

sendo l'effetto dell'equazione solare quello di posticipare i noviluni, e di portarli verso la fine del mese, ne segue che la correzione da farsi all'epatta giuliana dipendentemente dall'equazione solare debb' esser sottrattiva. Al contrario additiva si è la lunare perchè questa anticipa i noviluni, e gli porta verso il principio del mese. Dunque l'equazione totale dell'epatta giuliana sarà di

$$3 + \left(\frac{8K-112}{25}\right)_i - \left(\frac{3K-5}{4}\right)_i$$

quantità per se stessa sempre negativa, la quale avuto riguardo ai valori di E' che per essa si ottengono, i quali sono sempre compresi tra i limiti *, I, II ec. fino a XXIX potrà essere espressa da

$$\left(3+\left(\frac{8K-112}{25}\right)_i - \left(\frac{3K-5}{4}\right)_i\right)_r$$

senza portare variazione alcuna nel valore dell'epatta E' da determinarsi, e conseguentemente si avrà l'epatta annuale gregoriana E' aggiugnendo la quantità suddetta all'epatta giuliana $E = \left(\frac{11N-3}{30}\right)_r$ ossia

$$E' = \left(\frac{11N-3}{30}\right)_r + \left(\frac{3+\left(\frac{8K-112}{25}\right)_i - \left(\frac{3K-5}{4}\right)_i}{30}\right)_r$$

$$= \left(\frac{11N-\left(\frac{3K-5}{4}\right)_i + \left(\frac{8K-112}{25}\right)_i}{30}\right)_r \quad \ldots 4$$

ciocchè s' avea da dimostrare.

La medesima riducendo a frazioni decimali i rotti del numeratore, facendo cioè $-\left(\frac{3K-5}{4}\right)_i =$ $-(0{,}75K-1{,}25)_i$ ed $\left(\frac{8K-112}{25}\right)_i = (0{,}32K-4{,}48)_i$

e sostituendo si ridurrà ad

$$E' = \left(\frac{11N-(0{,}75K-1{,}25)i+(0{,}32K-4{,}48)i}{30}\right)_r \dots 5$$

Indarno qui si affaticherebbe uno di ridurre le due formole precedenti ad una espressione più semplice, essendo che le due equazioni non ripetono il principio dell'effetto loro da uno stesso secolo come si richiederebbe, ma dai due diversi 1600, 1400 respettivamente, oltre di che le frazioni residue del secondo e terzo termine del numeratore che vi si trascurano, il vietano.

Queste due formole (4, 5) dan l'epatta negativa, ogni volta che il termine dell'equazione solare esprime una quantità maggiore di quella della somma degli altri due termini. Ora l'epatta gregoriana non essendo che l'epatta giuliana corretta, diminuita cioè di una certa quantità, si rende manifesto, che ove la sottrazione non possa farsi senza che si ottenga un residuo negativo, debba essere l'epatta giuliana aumentata di 30., 60, 90 ec. secondo il bisogno: il che non dee stimarsi già un arbitrio, poichè nella formazione stessa dell'epatte (V. cap. IV.) che si fa coll'aggiugner successivamente undici, sempre che si ottiene un numero maggiore di trenta, di trenta si diminuisce: in guisa tale che così facendo com'è detto, non si viene ad aggiugnere, che quantità prima sottratte. Ma l'aggiugnere i numeri 30, 60, 90 ec. secondo i casi diversi all'epatta giuliana, onde ottenere dalla sottrazione il resto positivo, equivale a questo, di prendere cioè il complemento ai medesimi dell'epatta gregoriana avuta, considerata come positiva, perciò fin da principio (V. cap. II.) così prescrivemmo che si facesse. Si adatta altresì alle due formole seguenti (6, 7) quanto in questo luogo si è osservato.

CAP. VI

Dimostrazione delle rimanenti formole (6, 7, 8, 9) *dell' epatta annuale del calendario gregoriano, e prima di*

$$E' = \left(\frac{11\,N - 0{,}43\,K + 0{,}25\,b' + 3{,}44}{30}\right)_r \;\ldots\; 6.$$

Scoperta così nel precedente capitolo la legge osservata dall' equazione solare, e dall' equazione lunare separatamente, ho giudicato che potesse ancora trovarsi quella che seguono ambedue promiscuamente. Onde investigarla, ho da principio riflettuto, ch' essendo il periodo della prima di quattro secoli, e di 25 quello della seconda, il periodo delle due insieme debb' esser di cento secoli. Ho considerato inoltre che in detto periodo di tempo, occorrendo 75 equazioni solari, e 32 equazioni lunari, l' equazione dell' epatta diviene esattamente = — 43 giorni interi, e che ad ogni 25 secoli ancora la differenza tra l' equazione solare, e l' equazione lunare è espressa parimente da un numero intero di giorni uguale, o nò secondo la quantità dei bisestili soppressivi, ma che in tutti gli altri secoli del periodo venga essa espressa da un numero di giorni più una frazione, la quale dee esser poi non curata, come abbiamo praticato colle formole dell' equazione solare, e dell' equazione lunare appartenenti ai periodi di quattro, e di 25 secoli ragguagliatamente.

Il mentovato periodo di cento secoli mi è sembrato a proposito di supporlo principiato da quel secolo, dopo la riforma del calendario, nel quale ebbe luogo la prima equazione lunare, e nel quale s' impiegò ancora l' equazione solare, vale a dire nel 1800: il decimosettimo

secolo pertanto viene così ad esser l'ultimo del periodo precedente, al qual secolo aggiugnendo a mano a mano 25 secoli, si avranno quelli, ne' quali le correzioni cavate dall'equazioni solare e lunare, daranno, secondo si è detto, un numero intero di giorni senza residui da trascurarsi, e sono appunto i secoli 17.°, 42.°, 67.°, 92.°, 117.° ec. Calcolando pertanto le dette correzioni coll'espressione avuta di sopra
$3+\left(\frac{8K-112}{25}\right)_i-\left(\frac{3K-5}{4}\right)_i$ saranno esse respettivamente delle quantità qui appresso -8, -19, -30, -40, -51. Avute così le correzioni -8, -19, -30, -40, -51 corrispondenti ai secoli 17.°, 42.°, 67.°, 92.°, 117.°, ho tentato se facendo cinque equazioni algebraiche consimili alle impiegate in addietro, cioè

$$17R+c=-8$$
$$42R+c=-19$$
$$67R+c=-30$$
$$92R+c=-40$$
$$117R+c=-51$$

vi si potessero ottenere i valori del coefficiente indeterminato R, e della costante c tali, che calcolando con essi la correzione dell'epatta giuliana per qualunque siasi altro secolo venisse a riuscire esatta. Ma incontanente ho scoperto l'assurdità delle medesime, sottraggasi infatti la terza dalla quarta si avrà $25R=10$, laddove sottraendo la quarta dalla quinta si ha $25R=11$.

Allora sovvenutomi che la prima formola dell'equazione solare $\frac{3}{4}K+\frac{1}{4}b'-2=\frac{3K+b'-8}{4}$ da noi tro-

vata per correggere la lettera domenicale giuliana, ha tre termini, ho istituito altre cinque equazioni algebraiche ad essa consimili, impiegando nelle medesime due coefficienti indeterminati R, T, ed una costante c, e son le seguenti

$$16\,R + T + c = -8$$
$$40\,R + 2\,T + c = -19$$
$$64\,R + 3\,T + c = -30$$
$$92\,R + c = -40$$
$$116\,R + T + c = -51$$

nelle quali il primo termine del membro a sinistra è il numero più alto dei secoli dati divisibile per quattro, e multiplicato pel coefficiente indeterminato R, ossia $R\left(\frac{K}{4}\right)_i$: il secondo il residuo dei secoli dati divisi per quattro, moltiplicato pel coefficiente indeterminato T, ossia $T\left(\frac{K}{4}\right)_r$: l'ultimo termine poi si è la costante c: il membro a destra contiene la correzione dell' epatta giuliana poco fa calcolata relativamente ai cinque diversi casi supposti.

Queste cinque equazioni possono combinarsi a tre a tre, com'è noto, in dieci maniere diverse, ed ognuna di così fatte combinazioni (eccettuata quella delle tre prime equazioni, che non sono assolutamente diverse tra loro, come si richiede in tal sorta di problemi) danno i seguenti valori di R, T, c, cioè $R = -0{,}43$, $T = -0{,}68$, $c = -0{,}44$.

Così prendendo delle cinque la prima, la quarta, e la quinta, cioè

$$1.\quad 16R + T + c = -8$$
$$4.\quad 92R + c \ldots\ldots = -40$$
$$5.\quad 116R + T + c = -51$$

e sottraendo la prima dalla quinta si ha 100 $R = -43$, od $R = -\frac{43}{100} = -0{,}43$ e sostituendo nella quarta a 92 R il suo valore $= 92 \times -0{,}43 = -39{,}56$ si avrà $-39{,}56 + c = -40$, d' onde $c = -0{,}44$: per ultimo sottratto dalla prima il valore di $16R + c = 16 \times -0{,}43 - 0{,}44 = -6{,}88 - 0{,}44 = -7{,}32$ si avrà $T = -8 + 7{,}32 = -0{,}68$.

Ho calcolato poscia cogli ottenuti valori di R, T, c l' equazione dell' epatta giuliana pei cento secoli di un intero periodo, ed è riuscita costantemente senza errore: di più continuando a calcolare l' equazione medesima pe' secoli del periodo susseguente, ritornano ne' risultati quelle istesse frazioni che vi si trascurano, le quali si erano ottenute 100 secoli prima; laonde non potrà mai dubitarsi della giustezza de' valori de' coefficienti suddetti. Le quali cose si osservano altresì nell' espressioni dell' equazione solare, e dell' equazione lunare, nel cap. V. prec., separatamente ottenute.

Ora chiamando al solito K il numero dei secoli dati già compiuti, b' il residuo dei medesimi divisi per quattro, M' la correzione dell' epatta giuliana, le dette equazioni algebraiche potranno esprimersi generalmente così

$$(R(K-b') + Tb' + c)i = M'$$

ossia $-(0{,}43(K-b') + 0{,}68\,b' + 0{,}44)i$

$$= -(0{,}43\,K - 0{,}43\,b' + 0{,}68\,b' + 0{,}44)i$$
$$= -(0{,}43\,K + 0{,}25\,b' + 0{,}44)i$$

$$= -\left(\frac{(0,43K + 0,25\,b' + 0,44)i}{30}\right)_r = M'$$

dunque la formola generale dell' epatta annuale gregoriana sarà $E' = E + M'$

$$= \left(\frac{11\,N - 3 - (0,43\,K + 0,25\,b' + 0,44)i}{30}\right)_r$$

$$= \left(\frac{11\,N - (0,43\,K + 0,25\,b' + 3,44)i}{30}\right)_r \quad \ldots 6$$

ch' è ciò che bisognava dimostrare.

Sottraendosi dalla medesima $30\,N$ multiplo di 30, si avrà

$$E' = -\left(\frac{(19N + 0,43\,K + 0,25\,b' + 3,44)i}{30}\right)_r \quad \ldots 7$$

la quale dando sempre il valore di E' negativo, si dovrà far uso del suo complemento a 30, ovvero servirsi della seguente.

$$E' = 30 - \left(\frac{(19\,N + 0,43\,K + 0,25\,b' + 3,44)i}{30}\right)_r \quad \ldots 8$$

che torna lo stesso. Finalmente facendo

$$\left(\frac{(19N + 0,43\,K + 0,25\,b' + 3,44)i}{30}\right)_r = b'',$$

$$\text{e} \quad (19\,N + 0,43\,K + 0,25\,b' + 3,44)i = D$$

Se si faccia $30 - b'' = x - D$ determinando x, si otterrà la formola (9) rimanente. Imperocchè si avrà $x = 30 + D - b''$, e dividendo per 30, sarà $\frac{x}{30} = 1 + \frac{D - b''}{30}$ ora essendo $\frac{D - b''}{30}$ un numero intero, sia esso $= q$, sarà $\frac{x}{30} = 1 + q$, sia $1 + q = n$, sarà ancora $\frac{x}{30} = n$,

d'onde $x = 30\,n$, e sostituendo questo valore di x, avremo $30 - b'' = 30\,n - D$, per ultimo restituendo i valori di b'', D, si avrà

$$E' = 30 - \left(\frac{19\,N + 0{,}43\,K + 0{,}25\,b' + 3{,}44)i}{30}\right)_r \quad \ldots 8$$

$$= 30\,n - (19\,N + 0{,}43\,K + 0{,}25\,b' + 3{,}44)i \quad \ldots 9$$

nella quale il valore di n è prescritto dai limiti de' valori di E' i quali sono da zero a 29. Sia ex. gr. $-(19\,n + 0{,}43\,K + 0{,}25\,b' + 3{,}44)i = -84$, sarà $30\,n = 90$, ed $n = 3$, dunque $E' = 6$. La medesima può meritare la preferenza sopra le formole (4, 5, 6, 7, 8) si perch' è liberata dal denominatore, si ancora perchè dà il valore di E' positivo, come si richiede di averlo. Tuttavia la più facile a calcolarsi, a parer mio, è la quarta formola, della quale ci siamo serviti nell' esempio del cap. I.

Esempio del calcolo della Pasqua per l' anno 4980, adoperando per l' epatta annuale gregoriana la formola (9) precedente.

Nel calendario ecclesiastico giuliano, chiamando come al cap. II. E l' epatta, L la lettera domenicale H l'anno dato, e facendo $\left(\frac{H}{19}\right)_r = a$, $a + 1 = N$, $\left(\frac{H}{4}\right)_r = b$, $\left(\frac{H}{7}\right)_r = c$, si avrà costantemente

$$E = \left(\frac{11\,N - 3}{30}\right)_r \ldots \quad L = \left(\frac{3 + 2\,b + 4\,c}{7}\right)_r .$$

Calcolo dell' epatta ... $a = \left(\frac{H}{19}\right)_r = \left(\frac{4980}{19}\right)_r$ $= 2$, $a + 1 = 2 + 1 = 3 = N$.

$$E = \left(\frac{11N-3}{30}\right)_r = \left(\frac{33-3}{30}\right)_r = \left(\frac{30}{30}\right)_r = 0 = *$$

epatta del 31 marzo.

Calcolo della lettera domenicale ... $b = \left(\frac{H}{4}\right)_r$
$= \left(\frac{4980}{4}\right)_r = \left(\frac{80}{4}\right)_r = 0$, $c = \left(\frac{H}{7}\right)_r = \left(\frac{4980}{7}\right)_r$
$= 3$ .. $L = \left(\frac{3+2b+4c}{7}\right)_r = \left(\frac{3+2.0+4.3}{7}\right)_r = \left(\frac{15}{7}\right)_r$
$= 1 = A$.

Calcolo della pasqua ... $E = * = 31$ marzo; 31 marzo più 13 giorni $=$ 13 aprile, ed $L = A$ darà la pasqua ai 16 aprile.

Nel calendario gregoriano, chiamando E' l'epatta, L' la lettera domenicale, K il numero dei secoli compiuti dell'anno dato H, e facendo

$$\left(\frac{H}{4}\right)_r = b, \left(\frac{H}{7}\right)_r = c, \left(\frac{K}{4}\right)_r = b', \left(\frac{K}{7}\right)_r = c'$$

si avrà sempre $E' = 30n - (19N + 0{,}43K + 0{,}25b' + 3{,}44)_i$

ed $L' = \left(\frac{1 + 2\,(b + b') + 4c + 6c'}{7}\right)_r$

Calcolo dell'epatta ... avremo $N = 3$, $K = 49$, sarà inoltre $\left(\frac{K}{4}\right)_r = \left(\frac{49}{4}\right)_r = b' = 1$ dunque

$-(19N + 0{,}43K + 0{,}25b' + 3{,}44)_i =$
$-(57 + 21{,}07 + 0{,}25 + 3{,}44)_i = -(81{,}76)_i$
$= 81$, e $30n - 81 = 90 - 81 = 9 =$ IX, ch'è l'epatta de' 22 marzo.

Calcolo della lettera domenicale ... $c' = \left(\frac{K}{7}\right)_r$

$= \left(\frac{49}{7}\right)_r = 0$, e si ebbe $b = 0$, $c = 3$, $b' = 1$,

dunque $L' = \left(\frac{1 + 2(b + b') + 4c + 6c'}{7}\right)_r$

$= \left(\frac{1 + 2(0 + 1) + 4.3 + 6.0}{7}\right)_r = \left(\frac{15}{7}\right)_r = 1 = A.$

Calcolo della pasqua . . . E = IX = 22 marzo; 22 marzo più 13 giorni = 35 marzo = 4 aprile, ed $L' = A$ darà la pasqua ai 9 di aprile.

Quantunque il computo della pasqua nel calendario giuliano si renda utile oltremodo alla cronologia dei tempi prima della riforma, e serva maravigliosamente a manifestare l' eccellenza del calendario nuovo gregoriano pei gravi errori che nei risultamenti dei calcoli in quello si scuoprono, tuttavia, stante la maggior semplicità delle formole sue, ci limiteremo nell' esempio seguente a determinare la pasqua secondo il calendario gregoriano soltanto colla formola . . . 6. E sia per lo anno 4514.

Si avrà $H = 4514$, $K = 45$, $\left(\frac{H}{19}\right)_r = a = 11, a + 1$

$= N = 12$, $\left(\frac{H}{4}\right)_r = b = 2$, $\left(\frac{H}{7}\right)_r = c = 6$, $\left(\frac{K}{4}\right)_r$

$= b' = 1$, $\left(\frac{K}{7}\right)_r = c' = 3$,

$$E' = \left(\frac{11\,N - (0,43\,K + 0,25\,b' + 3,44)i}{30}\right)_r \ldots 6$$

$$= \left(\frac{11.\ 12 - (0,43.\ 45 + 0,25.\ 1 + 3,44)i}{30}\right)_r$$

$$= \left(\frac{132 - 23}{30}\right)_r = 19 = \text{XIX}.$$

$$L' = \left(\frac{1 + 2(b + b') + 4c + 6c'}{7}\right)_r$$

$$= \left(\frac{1 + 2(2 + 1) + 4 . 6 + 6 . 3}{7}\right)_r = 0 = G .$$

L'epatta XIX corrisponde nella tavola che sta dopo il cap. VIII. ai 12 di marzo, aggiunti 13 giorni si ha il 25 di marzo; la lettera domenicale G, dopo il 25 marzo, nella stessa tavola, s' incontra al primo di aprile, ch'è il giorno di pasqua dimandato, e combina colla tavola del Clavio; colla formola del Gauss però, si ottiene invece il 25 di marzo.

Prima di por fine a questo capitolo mostreremo un' altra via, dalla quale sbuca fuori, per così dire, spontaneamente, e senza che uno la cerchi la correzione identica M' dell' epatta giuliana, e ciò indipendentemente affatto dalla ricerca delle quantità R, T, c. Si osservi pertanto, che il numeratore dell' equazione lunare $\left(\frac{8K - 112}{25}\right)_i$ (pag. 21) nel 1400 fu $= 0$, tanto che fatto $K = 14$ si ha $8K - 112 = 0$. Ora nel periodo summentovato di 100 secoli è d' uopo, che il medesimo numeratore dia zero non già nel 1400, ma nel 1700, e perciò facendo $K = 17$, ed $8K - z = 0$, si avrà $z = 136$; in guisa tale, che l'equazione lunare pel periodo di 100 secoli sarà $\left(\frac{8K - 136}{25}\right)_i = (0,32K - 5,44)_i$. Ma poichè la correzione dell'epatta giuliana (pag. 23) è espressa da $3 + \left(\frac{8K - 112}{25}\right)_i - \left(\frac{3K - 5}{4}\right)_i$, se sostituiremo in questa e l' equazione lunare ora ottenuta, e l' equazione solare da noi data alla pag. 14, trasformata prima in decimali; allora la detta correzione di-

verrà $= (3 + 0{,}32\,K - 5{,}44 - 0{,}75\,K - 0{,}25\,b' + 2)i =$
$- (0{,}43\,K + 0{,}25\,b' + 0{,}44)i = M'$ siccome ci eravamo proposti di mostrare.

CAP. VII

Come possa facilmente supplirsi a memoria, nel computo della pasqua, alla tavola ch'è porzione del calendario perpetuo.

Da quanto si è fin quì esposto, chiaramente apparisce, che le formole della lettera domenicale, dell' epatta giuliana, ed una qualunque di quelle dell' epatta gregoriana colla parte del calendario perpetuo sopraddetta, bastano al calcolo della pasqua delli due calendari per qualunque siasi anno H. Ma potrà ancora farsi di meno della porzione di calendario perpetuo suddetta, solo che si osservi 1.° che quanto al giorno del mese da cercarsi in quella, corrispondentemente all' epatta calcolata, questa è sempre, respettivamente, il complemento a 31, e 30 del giorno del mese di marzo, o di aprile, cui appartiene. Così l' epatte XXIII, XI, V, * corrispondono agli 8, 20, 26, 31 di marzo, e l' epatte XXIX, XXV al primo, ed al 5 di aprile. La sola eccezione di questa regola cade nell' epatta XXIV, la quale è notata insieme coll'epatta XXV ai 5 di aprile; questa medesima eccezione però ne ajuta a distinguere facilmente l' epatte de' giorni di marzo dall' epatte dei giorni di aprile, che servono al computo della pasqua; imperciocchè le comprese da XXIII a * inclusive appartengono a marzo, e quelle da XXIX a XXIV ad aprile; quantunque si trovi lo stesso, se facciasi attenzione al limite più basso della decimaquarta della luna

di pasqua, stabilito, secondo le regole del calendario, ai 21 di marzo, dal quale, se si sottrae 13 giorni, si vede manifestamente, che il limite più basso del suo novilunio dee cadere agli otto di marzo, cui corrisponde l'epatta XXIII, d'onde risulta del pari che l'epatte da XIIII a * nel computo della pasqua, appartengono al mese di marzo, e le rimanenti al mese di aprile. Tutta la difficoltà dunque consiste nel ricordarsi che al 5 di aprile coll'epatta XXV è notata insieme l'epatta XXIV, e che all'epatta XXVI de' 4 aprile va unita l'epatta 25 di carattere diverso che serve quando $N > 11$.

2.° che quanto alla lettera domenicale da cercarsi nella stessa tavola per trovare il giorno di pasqua, niente più facile di supplirvi. Un'esempio persuaderà appieno il lettore di quanto asserisco. Supponiamo che si dimandi la pasqua del 4514 come nell'ultimo esempio, pel quale si trovò $E' =$ XIX, $L' = G$, allora si dica, il complemento di XIX a 31 è 12, dunque l'epatta XIX corrisponde ai 12 di marzo, e aggiunti 13 giorni si ha il 25 di marzo. Appresso si dica (senza aver riguardo se l'anno dato sia, o nò bisestile) il 25 di marzo è l'84.° giorno dell'anno, al quale corrisponde la lettera G, poichè $\left(\frac{84}{7}\right)_r = 0$, dalla lettera G de' 25 marzo alla lettera domenicale, che in questo esempio è del pari G, corrono 7 giorni, i quali aggiunti ai 25 di marzo dà la pasqua ai 32 marzo = al 1.° aprile come sopra. La ragione di ciò consiste in questo che le sette lettere A, B, C, D, E, F, G, sono notate lungo il calendario con ordine diretto, e che al primo di gennaro corrisponde la lettera A.

CAP. VIII

Come data l' epatta, e la lettera domenicale possa analiticamente calcolarsi la pasqua.

Il metodo da noi esposto finora pel calcolo della pasqua sembrerà a molti, per avventura, non esser del tutto analitico, dovendosi far uso in lui almeno in parte, quantunque a memoria, del calendario perpetuo. Senza ricercare se quanto può sembrare a costoro sia, o nò con fondamento, diremo a discarico nostro, che in trattando questa cosa, curammo principalmente di non ci allontanar dalle regole gregoriane, avendone massime dimostrato l'esperienza, secondo che si potrà rilevar dalle note nostre al Gauss, qualmente le sue formole furon cagione che varj cadessero in errore. A soddisfazion nondimeno universale, ed a render le teorie date perfino qui, compiutamente analitiche, aggiugneremo quanto appresso.

Calcolate che siano colle precedenti formole le quantità dell' epatta E', e della lettera domenicale L' del calendario gregoriano per lo anno dato, si faccia $\varepsilon = 30 - E'$, e poscia $d = \left(\frac{23 + \varepsilon}{30}\right)_r$, ed $e = \left(\frac{3 + L' + 6d}{7}\right)_r$, sarà la pasqua ai $22 + d + e$ di marzo, od ai $d + e - 9$ d' aprile. Se il calcolo darà il 26 aprile, si prenderà invece il 19; e dando il 25 aprile, se abbiasi $N > 11$, si prenderà il 18.

Nel calendario giuliano varrà lo stesso metodo, avvertendo di adoperare i valori di E, L, in luogo dei valori di E', L'.

Daremo sulla fine della nota 26 alla memoria del Gauss, la dimostrazione di questa regola, la quale ancorchè si accosti per una parte a quella del Gauss, tuttavia merita, a parer mio, l' attenzione dei dotti, contenendosi in essa i valori dell' epatta, e della lettera domenicale che nella sua s' investigherebbero a stento, ed è inoltre senza i numeri rappresentati da M, N, che variano irregolarmente quasi ad ogni secolo.

MEMORIA
DEL DOTTOR GAUSS
PEL COMPUTO DELLA PASQUA

RECATA DALLA LINGUA TEDESCA NELL' ITALIANA

CORRETTA ED ILLUSTRATA CON NOTE

DA LODOVICO CICCOLINI.

MEMORIA DEL D. GAUSS.

Lo scopo di questa memoria non è quello certamente d' insegnar il metodo consueto, onde trovar per un anno dato il giorno della pasqua, avendosi ciò in ogni trattato cronologico matematico, il qual metodo è di per se molto facile, ove non s' ignori nè l'uso, nè la significazione delle parole tecniche d' aureo numero, epatta, limiti pasquali, ciclo solare, lettera domenicale, e si abbiano le tavole nccessarie al bisogno. Quello che in questa memoria mia si va da me investigando è una soluzione puramente analitica del problema indipendente da quei mezzi, e tutta fondata sulle più facili operazioni del calcolo: per cui mi persuado che oltre anche la semplicità, e brevità sua, possa ella recar piacere, ed utilità non pure all' uomo di lettere, ma eziandio al semplice amatore delle scienze, quante volte gli occorra di stabilire il tempo della pasqua: poca notizia avendo del metodo antico, e comune, o mancando delle tavole a tal uopo calcolate, o non avendo come consultar di presente alcun calendario. Lette che siano con qualche attenzione le regole che io do, facilmente potrà chichessia mandarle a memoria: e varranno elleno per due secoli, cioè dire dal 1700 al 1899, se non che ove opportunamente cangi altri i numeri costanti che vi s' impiegano, e aggiunga loro una eccezione (1) indispensabile, e conforme ai principj fondamentali del nostro calendario (la qual eccezione non

---

(1) Accenna quì l' autore la prima delle due eccezioni, le quali sono in fine di questa sua memoria.

ha luogo nell' intervallo dei due secoli suddetti) potranno esse regole venire adattate ad un secolo altro qualunque (2).

I. Dividasi il numero dell' anno, del quale si vuole computare la pasqua per 19, *per* 4, *e per* 7: *Si trascuri il quoziente, e si chiami il residuo di queste divisioni, respettivamente*, a, b, c. *Se la divisione si faccia senz' avvanzo, si metta il suo residuo uguale a zero, e si dica il medesimo per le divisioni che vengono appresso.*

II. Si divida 19 a + 23 *per* 30, *e si chiami il residuo* d.

III. Finalmente si divida 2 *b* + 4 c + 6 d + 3, *ovvero* 2 b + 4 c + 6 d + 4 *per* 7, *secondochè il dato anno sia tra il* 1700 *e il* 1799, *oppure tra il* 1800 *e il* 1899, *e si chiami il residuo* e.

Sarà la pasqua al 22 + d + *e di marzo, ovvero al* d + e — 9 *di aprile, se* d + e *sia maggiore di* 9 (3).

---

(2) Vedremo alla nota (26) che le regole date dal Gauss pel calcolo della pasqua anzichè servire a qual si sia secolo, non potranno essere adoperate con sicurezza che fin al 4199.

(3) L' espressione analitica 22 + d + e di marzo, o l' altra $d + e - 9$ d' aprile potranno ambedue in tutti i casi servire ugualmente pel calcolo della pasqua, ond' è che l' una delle due rimane affatto inutile. Vuolsi tuttavia preferir la prima che ha tutti i suoi termini positivi, e non fa ostacolo $d + e > 9$, poichè non è chi non sappia che li 32, 33, 34 ec. fino ai 56, o 57 di marzo, equivalgono all' 1, 2, 3 ec. fin al 25, o 26 di apri-

Esempj. Dalla divisione dell' anno 1744 *per* 19, *trovasi il residuo* $15 = a$, *la divisione per* 4 *non dà avvanzo, adunque* $b = o$, *la divisione per* 7 *dà il resto* $1 = c$, *quindi si ha* $19a + 23 = 308$, *che diviso per* 30, *dà il resto* $8 = d$, *finalmente* $2b + 4c + 6d + 3 = 55$, *che diviso per* 7 *dà il residuo* $6 = e$, *dunque la pasqua sarà il* $22 + 8 + 6$ *di marzo, o l'* $8 + 6 - 9$ *d' aprile, cioè il* 5 *aprile.*

Pel 1800 *si ha* $a = 14, b = o, c = 1, 19a + 23 = 289$, *dunque* $d = 19, 2b + 4c + 6d + 4 = 122$, *dunque* $e = 3$, *quindi la pasqa il* $19 + 3 - 9$, *cioè il* 13 *aprile.*

Pel 1818 *si ha* $a = 13, b = 2, c = 5, 19a + 23 = 270$, *dunque* $d = o$, $2b + 4c + 6d + 4 = 28$, *dunque* $e = o$, *quindi la pasqua ai* 22 *di marzo.*

Nell' ultimo esempio, la pasqua cade nel giorno possibilmente più basso, essendo chiaro che d, *ed* e *han-*

---

le, come si ottiene allora quando si abbia $d + e = 10$, 11, 12, fin a 34, o 35. Chi poi volesse servirsi soltanto della seconda formola dovrà aver riguardo non solo al segno negativo tutte le volte ch'è $d + e < 10$, ma ancora alla circostanza di $d + e - 9 = o$: allora i giorni compresi da' 22 di marzo ai 25 o 26 di aprile, espressi dalla seconda formola, costituiranno la serie dei numeri naturali seguenti -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, o, 1, 2, 3, ec. fino al 25 o 26 aprile, dove chiaramente si vede che zero aprile non è che il 31 di marzo, il -1 aprile è il 30 di marzo, e così via discorrendo degli altri valori negativi, i quali tutti s' incontrano a mano a mano e secondo che $d + e = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, o$.

no qui il minor valore possibile. S' osservi d'altronde che non può esser pasqua più tardi del 22 + 29 + 6, *cioè del* 26 *aprile, perchè* d *non può esser maggiore di* 29, *nè e di* 6, *ma nel* 18.°, *e* 19.° *secolo, non può mai accadere* d = 29 (*nota . . . la ragione è questa che* a *può avere solamente* 19 *valori, cioè,* 0, 1, 2, 3 . . . *fin a* 18, *e perciò ancora* d *non più d' altrettanti, fra i quali non vi è quello di* 29) (4). *Adunque in questo spazio di tempo la pasqua più alta cade nel* 25 *di aprile, il che ha sempre luogo, quando si ha* d=28, *ed* e=6 (5). *Queste due condizioni si combinano negli anni* 1734,

---

(4) I due filari di numeri che seguono dimostrano chiaramente che nel secolo. 18.°, e 19.° non può venire $d = 29$, come pure che d non può avere più di 19 valori. Se $a =$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

sarà $d =$

23, 12, 1, 20, 9, 28, 17, 6, 25, 14, 3, 22, 11, 0, 19, 8, 27, 16, 5.

Si sono ottenuti calcolando il residuo $\left(\frac{19a + 23}{30}\right)_r$ fatto successivamente $a = 0, 1, 2,$ ec. fin a 18.

(5) Avverti all' espressione dell' autore *il che ha sempre luogo*, cioè dal 1700 al 1899; mentre dopo il 1899, come negli anni 1954, 2106, ec. quantunque s' abbia $d = 28$, ed $e = 6$, la pasqua sarà ai 18 aprile, stante la seconda eccezione data dall' autore medesimo infine alla sua memoria; stimai giovevole di prevenirne il lettore, onde non caggia in isbaglio, e formisi una giusta idea di quanto si ragiona in questo luogo.

1886. *In altri secoli potrebbe benissimo essere* d = 29 (6), *ma appunto in questo caso ha luogo l'eccezione accennata di sopra, per cui il valore di* d *è ribassato a* 28 (7), *sicchè il* 25 *aprile è la pasqua assolutamente*

---

(6) Nel secolo 20.° poi, nel quale alla determinazione di d, s'adoprerà $\left(\frac{19a+24}{30}\right)_r$, invece di $\left(\frac{19a+23}{30}\right)_r$ per le ragioni che diremo più oltre, i valori di d si muteranno, e saranno corrispondentemente a quelli di a maggiori dell'unità dei precedenti, non impiegandosi più nel numeratore del rotto esprimente il residuo il numero 23, ma $23+1=24$, e perciò laddove essendo $a=5$, si trovò $d=28$, si troverà $d=29$. La tavola prima, che si trova infine alla memoria, mostra subito i valori di d qualunque sia nel numeratore del residuo, il numero da aggiugnersi con $19a$, il quale numero è detto M dall'autore, ed è sempre positivo, e minore di 30. La prima linea orizzontale superiore contiene i valori di a da zero infino a 18, e la prima linea verticale a sinistra, contiene i valori di M da zero a 29. Tutti gli altri numeri della tavola sono i respettivi valori di d relativamente ai diversi valori di a, M. Così, per esempio, se dimandisi d, dato $M=23$, ed $a=15$; verticalmente sotto 15, in corrispondenza orizzontale di 23, si troverà $d=8$. Rassomiglia essa in certo modo alla tavola spasa dell'epatte.

(7) Quel che poi afferma l'autore circa il valore di $d=29$ che è ristretto al 28, non ha luogo quando esso valore si combini con $e=5$, in tal caso la formola dà giustamente la pasqua ai 25 d'aprile, come negli

più alta (8). Sarebbe troppo il voler maggiormente spiegar qui queste circostanze.

L' analisi per la quale si è trovata la suddetta

---

anni 2038, 2190, ec., del che renderemo ragione alla nota (27) Incontrandosi poi $d = 29$ con $e = 6$, il calcolo della formola dà la pasqua ai 26 di aprile; ma l'eccezione appostavi la riduce al 19. Che però convien dire, che allora, non solo il valore di $d = 29$ è ribassato al 28, ma contemporaneamente, ancora il valore di $e = 6$, è ribassato a zero; e ciò non dee recar maraviglia se si rifletta qualmente il residuo di $\left(\frac{2b+4c+N}{7}\right)_r$ il quale concorre insieme con $\left(\frac{6d}{7}\right)_r$ alla determinazione di c, oltre essere affatto indipendente dalla quantità d, è ancora necessariamente $= 0$, semprechè sia $d=29$ ed $e=6$; per cui $\left(\frac{2b+4c+6d+N}{7}\right)_r = \left(\frac{6d}{7}\right)_r$, onde prendendo $d = 29$ si ha $e = \left(\frac{6d}{7}\right)_r = \left(\frac{6.29}{7}\right)_r = 6$, laddove facendo $d=28$, viene $e = \left(\frac{6d}{7}\right)_r = \left(\frac{6.28}{7}\right)_r = 0$.

(8) I limiti 19 marzo, e 25 aprile della pasqua, cavati fuori dalla formola del Gauss, corrispondono esattamente a quanto fu decretato nel Concilio Niceno nell' anno 325 di G. C. Imperciocchè stabilito venne dai Padri di quel concilio, doversi celebrare la pasqua nella domenica, che più vicina s'incontra dopo la XIV luna del primo mese; chiamasi poi primo mese, presso gli Ebrei, quello, la XIV luna del quale, o cade nel gior-

formola sta propriamente nell' aritmetica sublime (9) *rispetto alla quale non posso ancora riferirmi ad alcuno scritto, nè qui si potria riportare nella sua intera semplicità, e basterà in questo mezzo ciò che soggiungo a concepire una idea del fondamento della ragionevolezza della regola prescritta, e a persuadersi della sua esattezza* (10).

---

no dell' equinozio di primavera ai 21 di marzo, o che lo segua più da vicino: di maniera che cadendo la XIV luna ai 21 di marzo in giorno di sabato, nel 22 susseguente (ed è questo il termine più basso) sarà pasqua. Ma se la XIV luna, precedendo di un giorno, fosse in vece ai 20 di marzo, essa apparterrà all' ultimo mese, e la XIV seguente del primo mese cadrà nel giorno 18 di aprile, il qual giorno se sia domenica, si farà pasqua ai 25 di aprile, ch' è il termine suo più alto.

(9) Vedremo in processo come dai pochi principj esposti nel cap. I., e dall' algoritmo algebraico impiegato tanto nel resto della memoria del Gauss, quanto in quello che siamo per soggiugnere in queste note, risulti una dimostrazione completa della proposta formola, onde io sono compreso alquanto da maraviglia per l' espressione usata dall' autore, cioè *la suddetta formola, fondasi propriamente nell' aritmetica sublime, rispetto alla quale non posso ancora riferirmi ad alcuno scritto*, quasi fosse necessità d' un trattato di nuove aritmetiche teorie a poternela dimostrare.

(10) La dimostrazione della formola data dall' autore nei seguenti paragrafi per quello spetta all' intervallo di tempo dei due secoli 18.°, e 19.° è giusta, piana, e

L' aureo numero di un anno del nostro computo, è, siccome consta, il residuo che risulta, quando al numero dell' anno si aggiunga uno, e si divida la somma per 19, *se la divisione si faccia senza resto deve essere* $=19$ (11), *e seguita da ciò che* $a+1$ *sia l' aureo numero dell' anno dato* (12).. *Il plenilunio pasqua-*

---

ingegnosa; vi manca solo la dimostrazione delle due eccezioni che vanno unite alla formola suddetta, e che sono riportate dall' autore in fine alla sua memoria, cui vedremo noi di supplire a suo luogo colla maggior chiarezza, e possibile brevità.

(11) L' autore disse poco fa, *se la divisione si faccia senza avvanzo, si metta il suo residuo uguale a zero, lo stesso si dica nelle seguenti divisioni*, dice ora, *se la divisione si faccia senza resto dev' essere uguale a* 19. ciò che può in qualche maniera sembrar contraddittorio, quantunque nol sia, trattandosi qui dell' inchiesta dell' aureo numero assolutamente. A cessare, ciò nondimeno, siffatto scrupolo, potremo dire così, l' aureo numero di un anno del nostro computo, è il residuo, accresciuto dell' unità, che risulta dalla divisione del numero dello stesso anno per 19, ossia $\left(\frac{H}{19}\right)_r+1$.

(12) Poichè l' autore fece $\left(\frac{H}{19}\right)_r=a$, l'aureo numero per l' anno H sarà $a+1$, il che si adatta perfettamente a quanto si è detto nella precedente nota; così vedesi ancora che quando $\left(\frac{H}{19}\right)_r=0$ l' aureo numero è 1, e quando $\left(\frac{H}{19}\right)_r=18$ l' aureo numero è 19.

le (13) *nel* 18.°, *e nel* 19.° *secolo, se l'aureo numero è uno, cade nel* 13 *aprile, e quindi per tutto il corso di anni* 19, *cioè inclusivamente all' anno che ha il* 19 *per aureo numero, cade ogni anno od* 11 *giorni più presto, o* 19 *più tardi che nell' antecedente, secondo che quello era caduto od in aprile, od in marzo, del modo che facilmente può persuadersi ciascuno, avendo agli occhi una tavola di pleniluni pasquali. Laonde per l'anno il cui aureo numero sia il due, il plenilunio cadrà nel due aprile, l'anno seguente nel* 22 *marzo, l'anno che per aureo numero ha il quattro nel*

---

(13) L' autore chiama sempre plenilunio pasquale la decimaquarta luna del primo mese, alla maniera de' Greci, ma contro l'uso dei più gravi Latini Scrittori del calendario. Noi useremo in seguito, a malgrado nostro, la denominazione di plenilunio secondo il Gauss, a non fare che si credesse aver noi in vista due cose, l'una dall' altra dissimiglianti. Ecco pertanto i pleniluni pasquali del secolo 18.°, e 19.° notati nella seconda e quinta riga, sotto ai numeri d'oro corrispondenti. *A* denota aprile, *M* denota marzo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13 *A*	2 *A*	22 *M*	10 *A*	30 *M*	18 *A*	7 *A*	27 *M*	15 *A*	4 *A*
44	33	22	41	30	49	38	27	46	35

11	12	13	14	15	16	17	18	19
24 *M*	12 *A*	1 *A*	21 *M*	9 *A*	29 *M*	17 *A*	6 *A*	26 *M*
24	43	32	21	40	29	48	37	26

la terza e la sesta riga dei numeri non è che la riduzione a giorni di marzo dei dì d'aprile.

10 *aprile, e dite voi; chiaro è adunque da ciò il plenilunio pasquale non esser mai prima del* 21 *marzo, nè dopo il* 19 *d'aprile: che se cade esso nel* 21 + D (*riducendo a giorni di marzo i seguenti di aprile*) *nell'anno il cui aureo numero sia* a + 1, *sempre* D *starà fra i confini zero, e* 29 *inclusive* (14). *Ed ecco pertanto ch' essendo* a = 0, *sarà* D = 23 (15); *per* a = 1, D = 23 — 11; *per* a = 2, D = 23 — 2 . 11; *per* a = 3, D = 23 — 2 . 11 + 19 *ec. e generalmente* D = 23 — 11 p + 19 q, *dove* p, *e* q *sono determinati dalla condizione, che sia* p + q = a, e D *stia tra i limiti zero, e* 29 *inclusive, perciò avremo* D = 23 + 19 a — 30 p (16).

---

(14) Dai pleniluni segnati nella precedente nota apparisce che il plenilunio pasquale non è mai prima del 21 marzo, nè dopo il 18 aprile, ed in tal caso i limiti di *D* debbono esser zero, e 28. Così in fatti addiviene nel secolo 18.°, e 19.°, pei quali l' autore ha dato la formola della pasqua, e della quale ora rende ragione. L' avere egli però usato l' espressione, *nè dopo il* 19 *aprile*, e poco dopo, *sempre* D *starà fra i confini zero e* 29 *inclusive*, ci persuade ch' egli parli ora generalmente di qualsisia secolo ulteriore, altrimenti l' ordine del discorso importerebbe contraddizione.

(15) Se sia $a = 0$, sarà $D = 23$, poichè essendo $a = 0$ l' aureo numero sarà uno, ed il plenilunio pasquale sarà ai 13 aprile, ossia al 44 di marzo, onde $21 + D = 44$, e però $D = 44 - 21 = 23$.

(16) $D = 23 - 11p + 19q$, ossia, $D = 23 + 30p - 11p + 19q - 30p = 23 + 19p + 19q - 30p = 23 + 19(p + q) - 30p = 23 + 19a - 30p$, dove ommet-

d' onde facilmente deducesi che D *sia risultante dalla divisione di* 23 + 19 a *per* 30, *per conseguenza* D = d, *ossia il plenilunio pasquale nel* 21 + d *di marzo* (17).

---

tendo $-30p$ (poichè D dee essere il residuo risultante dalla divisione per 30, essendo il suo valore tra i limiti zero, e 29) rimarrà $D = 23 + 19a$ e però $D = \left(\frac{19a + 23}{30}\right)_r$, ma quest' istesso residuo è $= d$, dunque $D = d$. Si avverta che la quantità $23 + 19a$ viene espressa generalmente dall' autore da $19a + M$, laonde da $19a + M = d = D$, se abbiasi uno di numero aureo (od $a = 0$ ch' è lo stesso) risulta $M = d = D$, come consta altresì dalla citata tavola prima.

(17) E qui vuolsi avvertire che quantunque nel secolo 18.°, e 19.° il plenilunio pasquale, essendo l'aureo numero 1 cada ai 13 aprile, non così avviene nei secoli trapassati, nè così accadrà nei secoli avvenire; per cui il valore di M in essi è maggiore, o minore di 23, secondo i casi diversi. Così per esempio prima che succedesse la riforma del calendario, il plenilunio pasquale, essendo l' aureo numero uno, cadeva ai 5 di aprile, ossia al 36 di marzo, e però $21 + D = 36$, d' onde $D = 15 = d$, ed è la quantità costante M di cui l' autore fa uso pel calcolo della pasqua del calendario giuliano. Similmente dalla riforma al 1699, col numero aureo uno, il plenilunio pasquale succedeva ai 12 di aprile, ossia ai 43 di marzo, e però $21 + D = 43$; $D = 22 = d = M$. Essendo adunque l' aureo numero uno, il plenilunio pasquale fu fino al 1582 ai 36 di marzo, dal 1583, al 1699 ai 43 di marzo, e dal 1700, al 1899, ebbe, ed

avrà luogo ai 44 di marzo. E in questa ragione continuando troveremmo parimente che dal 1900 al 2199, sarebbe ai 45 di marzo; e così andar esso posticipando nei secoli avvenire dal 2200 in poi. Alla investigazione della causa di un simile ritardo dei pleniluni nei secoli futuri, ne giova di qui ricordare alcune cose all'istoria del calendario appartenenti, e sono che prima del 1582, praticossi universalmente di fare l'anno solare di 365 giorni e sei ore; e 19 anni solari uguali a 19 anni, e sette mesi lunari, facendosi nei 19 anni lunari alternativamente i mesi di 30, e 29 giorni, e nei sette mesi lunari che avvanzano i primi sei di 30, e l'ultimo di giorni 29. Questi sette mesi furono detti embolismici, e s'intercalavano nel 3.° 6.° 9.° 11.° 14.° 17.° 19.° dei 19 anni lunari, ed erano questi di 13 mesi, ossia di 384 giorni, eccettuato il 19.° ch'era di giorni 383. Metone fu il trovatore di un così fatto ciclo lunare, pel quale nel termine di 19 anni i noviluni, ed i pleniluni cadevano negli stessi giorni del mese, nei quali erano succeduti ne' 19 anni precedenti. Furono perciò notati coi numeri 1, 2, 3. . . fino a 19 tutti quei giorni nei mesi dell'anno, nei quali cadevano i noviluni corrispondentemente all'anno 1.° 2.° 3.° . . . . fino al 19.° del ciclo lunare, e vennero appellati numeri d'oro. I Padri del Concilio di Nicea fecero uso di questi, e se ne valsero a determinare il tempo della celebrazion della pasqua, e da Dionisio il piccolo circa il 532, tenendo Giustiniano primo lo Impero, furono notati a norma di quanto fu stabilito dal concilio suddetto, e conservarono il luogo loro assegnato nel calendario fino al 1582, epoca della sua riforma. Il numero d'oro uno fu apposto ai 23 di marzo, e però aggiugnendo 13 giorni, se-

condo fu stabilito dai nostri maggiori, dava il plenilunio costantemente, prima della riforma, ai 36 di marzo, secondo ch'è detto di sopra. Due gravissimi difetti avvenne che si notassero però in un tal calendario, l'uno di aver fatto cioè l'anno solare di 365 giorni e sei ore, maggiore del vero, sì che ogni 400 anni circa, si componeva insieme un errore di tre giorni; l'altro derivante dal ciclo di metone, supposto di 19 anni solari ch'è un pò minore, d'onde un novello errore di un giorno sorgea nell'intervallo di anni 312, e mezzo circa. I riformatori vennero a capo di rimediare a così gravi difetti, senza però punto alterare la lunghezza dell'anno solare di 365 giorni e sei ore, e mantenendo l'uso del ciclo lunare, e ciò mediante due equazioni l'una solare, e lunare la seconda. Colla prima soppressero tre giorni ogni 400 anni, stabilendo che gli anni 1700, 1800, 1900 fosser comuni, ma il 2000 bisestile, e che sempre così si facesse nel tempo avvenire. Ad ogni bisestile pertanto secolare soppresso, venivano d'un giorno posticipati i noviluni del calendario. Coll'altra equazione anticiparono di un giorno (vedi la pag. 19.) ogni 300 anni, i noviluni del calendario, con questo però, che dopo avere impiegate sette equazioni di simil genere, a usar dell' ottava aspettavano invece di 300, 400 anni, onde compensare i 12 anni e mezzo trascurati precedentemente per sette volte. Che però colle due equazioni solare e lunare, furono in via d'ottenere, che i noviluni venissero in seguito bene indicati nel calendario. Dissi ch'e' furono in via per questo, perchè rimanea tuttavia da rimediare agli errori sommati dalle due cause, ricordate testè, nel lasso di tempo di 1257 anni, intercetti tra 'l 325 e 'l 1582, ossia dal tempo del concilio Niceno a

quello della riforma del calendario. L'equinozio in effetto stabilito ai 21 di marzo dai PP. di quel concilio era già anticipato, per la prima ragione da noi addotta, di 10 giorni circa, e succedeva al tempo della riforma agli 11 dello stesso mese in luogo de' 21. Per ritornarlo al 21 di marzo, furono ommessi 10 giorni al 4 ottobre 1582, e però dopo il 4 non si disse il 5 ma il 15 ottobre, invece del sei si disse il 16, e così i rimanenti giorni dell' anno 1582, e quelli degli anni seguenti furono tutti rimossi di 10 giorni: per la seconda ragione poi da noi parimente riferita, la luna in 1257 anni avea anticipato i suoi noviluni di 4 giorni circa, e conseguentemente di altrettanto era la posticipazione nei noviluni dal calendario indicati. Sembrerebbe adunque che fosse stato bisogno rimuovere i numeri d' oro verso il principio del mese di 4 giorni, affinchè indicassero quindi giustamente i noviluni, ma la seguita soppressione di 10 giorni avrebbe obbligato al contrario di trasportarli di 10 giorni verso la fine del mese, perchè il numero d'oro uno ex. gr. corrispondente prima della riforma ai 23 di marzo, dopo lei, per la detta soppressione, dovette trovarsi invece col 33 marzo, ossia col due aprile. Per la qual cosa si potè correggere l'uno, e l'altro errore insieme, portando verso la fine del mese i numeri d'oro di sei giorni soltanto. Ma parve miglior consiglio ai riformatori di farli discendere di 7 giorni piuttosto che di sei, affinchè i numeri d' oro del calendario, mostrassero i noviluni medi più tardi del giusto di uno o due giorni, sì che la XIV della luna pasquale (osservisi qui come cade naturalmente il bisogno di distinguere la XIV della luna dal plenilunio; vedi la nota 13) mai non precedesse oltre un giorno i pleniluni medi. L'aureo numero uno pertanto che pri-

ma della riforma corrispose ai 23 di marzo, dopo la medesima, si trovò corrispondere al 30 del mese medesimo, onde aggiuntigli 13 giorni, il plenilunio dovea cadere ai 43 di marzo, siccome abbiamo precedentemente notato. Similmente nel 1700, essendo stato ommesso il bisestile, il numero d'oro uno, non fu più corrispondente ai 30 marzo, sivvero ai 31, ed il plenilunio pasquale non succedeva più ai 43, ma ai 44 di marzo, cosa di già avvertita da noi. Apparisce da ciò apertamente i numeri d'oro, e con essi i noviluni, e perciò i pleniluni ançora ad ogni equazione solare dover esser posposti, e ritardati di un giorno, e di un giorno anteposti, ed anticipati ad ogni equazione lunare, restando immobili in quei secoli, nei quali simultaneamente si debba far uso dell'una, e dell' altra equazione. Ora l'effetto della equazione solare essendo molto maggiore nel ritardare i noviluni che non è quello dell'equazione lunare nell'anticiparli, stando l'una all'altra come 75 a 32 in cento secoli, ne segue, generalmente parlando, la posticipazione dei pleniluni indicata da noi, e la necessità oltre a questo di portare, conforme i secoli diversi, ora verso la fine del mese, ora verso il principio tutti i numeri d'oro segnati nel calendario, a indicarne per l'appunto i noviluni. Talchè essendo distribuiti colla regola data dal Gauss, successivamente in 30 giorni i numeri d'oro, e coll' andar de' secoli dovendo essi così ordinati, a mano a mano corrispondere a ciascuno dei 30 giorni suddetti, non è difficile a intendere, che se conservati si fossero nel calendario i numeri d'oro, avrebbe bisognato far uso di 30 calendari diversi relativamente all' equazioni lunare, e solare ne' respettivi secoli impiegate. Luigi Lilio però coll'invenzione dell'epatte, ridus-

se li 30 ad un sol calendario. Che bene vide egli come tanto era mantenere i 19 numeri indicanti i noviluni nei 19 anni del ciclo lunare colla condizione di traslocarli quasi in giro secondo il bisogno, quanto d' impiegarne stabilmente 30, e da questi prenderne 19 secondo certe regole stabilite, e corrispondentemente ai secoli diversi. E perciò dai riformatori furono sostituite l' epatte ai numeri d' oro. Sarà alcuno il quale dimanderà perchè il Gauss nella invenzione della sua formola adoperasse più tosto i numeri d' oro che l' epatte? E a tale risponderò, che forse il Gauss non dovette far uso dell' epatte, perchè queste oltre l' avere la progressione loro, quanto ai giorni del mese, interrotta ai 4 e 5 aprile (al che tuttavia si rimediava per mezzo delle due eccezioni espresse da lui) l' interrompe ancora prima là, dove i giorni 30 di marzo, 31 di marzo, primo d' aprile, hanno per epatta 1, *, 29, il che non succede nei numeri d' oro, siccom' è manifesto a chi esamini le 30 serie di essi (inservienti dal primo marzo agli 8 aprile) da noi riportate nella tavola seconda, a chiarezza maggiore: abbiamo però veduto andar la cosa al contrario, pel continuo uso dell' epatte, fatto da noi nelle formole analitiche, e particolarmente alla pag. 36. Sopra la stessa tavola seconda, potrà eziandio verificare il lettore la regola data dal Gauss risguardante la disposizione dei numeri d'oro. Confrontata sulle 30 serie suddette, egli la troverà fallace, 8 volte ai 4 di aprile, e 19 ai cinque dello stesso mese, e noto fin da ora, come da questa medesima anomalia della regola suddetta, derivino le due eccezioni della formola, date dal Gauss infine alla sua memoria, secondo che vedremo a suo luogo.

III. Ora la pasqua stessa cade nella prima domenica dopo il plenilunio pasquale, e quindi non meno di un giorno dopo, e non più di sette giorni più tardi, ma certamente non prima del 22 + d *di marzo. Dato adunque che la pasqua cada nel* 22 + d + E *di marzo*, E *starà allora tra i limiti zero e sei inclusive, e conviene verificar la condizione che in detto giorno sia domenica. Questa condizione si esprime coll' aritmetica pura nella seguente maniera* (18); *l' intervallo tra il* 22 + d + E *marzo dell' anno dato, e di qualunque determinata domenica dee fare un numero di giorni (un intero numero di settimane) divisibile per sette. Si prenda dunque una determinata domenica, scelgo il* 21 *marzo* 1700, *chiamando* A *il numero dell' anno dato, ed* i *il numero degli anni bisestili tra il* 1700 *e l' anno* A, *quello escluso, e questo incluso*; *allora* i *sarà al tempo stesso il numero dei giorni intercalari tra il* 21 *marzo* 1700, *e la pasqua dell' anno* A, *e il numero di tutti i giorni dal* 21 *marzo* 1700, *infino al* 22 + d + E *di marzo* (19) *dell' anno* A sarà

(18) Nella nota (23) daremo un metodo aritmetico semplicissimo, il quale, quantunque espostovi ad altro fine, servirà ancora a determinar E.

(19) Ancora qui si richiede la espressione *quello escluso, e questo incluso*, altrimenti il numero di giorni contenuti nel detto intervallo di tempo, non sarebbe divisibile per 7, ma darebbe 1 di residuo; il resto $1 + d + E + i + 365 (A - 1700)$ che si ottiene per sottrazione, implicitamente dichiara la ommissione che noi notiamo.

$1 + d + E + i + 365 (A - 1700)$. *Con uguale facilità si ottiene che tra il* 1700 *e il* 1799 *sia* $i = \frac{1}{4} (A - b - 1700)$ (20), *al contrario fra il* 1800 *e il* 1899 $i = \frac{1}{4} (A - b - 1700) - 1$, (21). *Adunque a determinare* E *si ha la condizione che* $1 + d + E + 365 (A - 1700) + \frac{1}{4} (A - b - 1700)$, *ovvero* $d + E + 365 (A - 1700) + \frac{1}{4} (A - b - 1700)$ *possa dividersi per sette, secondo che cada l'anno tra il* 1700 *e il* 1799, *ovvero tra il* 1800 *e il* 1899. *Dunque deve uscirne un numero divisibile per sette, quando pure se gli aggiunga, o se gli sottragga un multiplo di* 7, *oppure da un multiplo di* 7 *venga sottratto. Primieramente a liberarmi dal rotto aggiungo* $\frac{7}{4} (A - b - 1700)$ *divisibile come ognun vede per* 7, *e ne ottengo* $1 + d + E + 367 (A - 1700) - 2b$,

ovvero $d + E + 367 (A - 1700) - 2b$

inoltre sottraggo $364 (A - 1700)$ *e ne ho subito allora* $1 + d + E + 3A - 5099 - 2b$, *ovvero* $d + E + 3A - 5100 - 2b$, *inoltre aggiunto* 5096 *dà* $d + E +$

---

(20) $i = \frac{1}{4} (A - b - 1700)$. Convien qui ricordarsi che b è il residuo di A diviso per 4, e perciò $\frac{1}{4} (A - b - 1700)$ è un numero intero uguale ad i. Ancora potrà osservarsi che l' autore non ha riguardo in questo luogo al bisestile soppresso nel 1700, perch'egli ha scelto la domenica dei 21 marzo 1700 posteriore al giorno ommesso.

(21) $i = \frac{1}{4} (A - b - 1700) - 1$. L'unità ora sottratta non è che il bisestile soppresso del 1800.

$3A - 3 - 2b$; *oppure* $d + E + 3A - 4 - 2b$, *finalmente sottratti che siano* $3A - 3c$, *che sono divisibili per* 7, (22), *danno* $d + E + 3c - 3 - 2b$, *oppure* $d + E + 3c - 4 - 2b$, *i quali sottratti da* $7c + 7d$ *danno* $3 + 2b + 4c + 6d - E$, *ovvero* $4 + 2b + 4c + 6d - E$ *divisibili parimente per* 7. *Chiaro è adunque che dividendosi per* 7 *la quantità* $3 + 2b + 4c + 6d$, *ovvero* $4 + 2b + 4c + 6d$, *si avrà l' avvanzo uguale ad* E, *e per conseguenza* $E = e$. *Adunque cade la pasqua nel* $22 + d + e$ *di marzo*, *oppure*, *ciò che è lo stesso il* $d + e - 9$ *di aprile* (23).

---

(22) Che $3A - 3c$ sia divisibile per 7 chiaramente apparisce, osservando che c è il residuo di A diviso per 7, però $A - c$ diviene divisibile per 7, e così il suo triplo $3A - 3c$.

(23) Una volta che colla formoletta $21 + d$ siasi calcolato il giorno del mese del plenilunio pasquale, se trovisi quindi il giorno della settimana cui corrisponda, si conoscerà ancora ai quanti del mese cadrà la domenica susseguente, ossia la pasqua. Così nel prossimo anno 1818 il plenilunio pasquale cadendo ai 21 di marzo, se troveremo che sia in giorno di sabato, diremo che la pasqua cada nel giorno appresso, od ai 22 di marzo. Ecco pertanto una regola facilissima aritmetica per determinare il giorno della settimana al quale corrisponde qualsisia giorno del mese di un anno dato nel 19.° secolo, ossia dal 1800 al 1899; e sia per esempio quello dei 21 marzo 1818. Si aggiunga al numero 1817 degli anni precedenti il numero degli anni bisestili contenutovi (non avuto riguardo ai bisestili secolari soppressi), ed i

giorni scorsi dal 1.° gennajo al 21 marzo inclusive, si divida la somma $1817 + 454 + 80 = 2351$ per 7, e il residuo 6 indicherà ch'è giorno di sabato: i residui 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, rispondendo ai giorni della settimana domenica, lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato. Nel secolo 18.°, vale a dire dal 1700 al 1799, varrà la stessa regola, colla sola eccezione, di aggiugnere l' unità al residuo per essa ottenuto. D'ond'è manifesto pei 21 di marzo 1818 (chiamando e'' la quantità da aggiugnersi a $21 + d$ per avere la pasqua) essere $e'' = 7 - 6 = 1$; e'' è sempre maggiore dell'unità della quantità e di Gauss; e ciò a motivo del primo termine della sua formola, mutato da 22 in 21 dalla regola nostra, per la quale la formola della pasqua diviene $21 + d + e''$ invece di $22 + d + e$. Questa regola con somma facilità si rende universale per un secolo qualunque; si richiede perciò che alla somma dei 3 numeri, si sottraggano inoltre prima di far la divisione per 7 tre altri piccoli numeri, i due primi costanti, e sono 2, 10, il terzo è il numero dei bisestili secolari soppressi dalla riforma fino all'anno dato. Spettano i due primi uno al principio dell' era nostra che fu in giorno di sabato, e nel computo nostro si vuol partir dal lunedì, ond'è d' uopo compensare, e sottrarre due giorni dalla somma ottenuta; l' altro 10 è il numero dei giorni soppressi nel 1582, inoltre essendosi ommessi dalla riforma al secolo 19.° due bisestili, i tre numeri da sottrarsi saranno $2 + 10 + 2 = 14$: 14 però è un multiplo di 7 e avviene da ciò che nel secolo 19.° detta sottrazione si renda inutile. Nel secolo per altro 18.°, poichè non si era ommesso che un sol bisestile, siegue, che la somma a sottrarre non potesse esser che 13, ed essendo che in tal sorta di

calcoli sia lo stesso sottrarre 13 che aggiugner uno, da qui avvenne quindi, che io prescrivessi d'aggiugnere 1 all'avvanzo trovato. Si faccia osservazione al presente, altro non essere la somma dei primi tre numeri, che il numero di giorni intercetto dal principio dell'era nostra fino al giorno dell'anno dato, sminuito però di 364 volte il numero degli anni che gli antecedono, e senza riguardo ai giorni ommessi nella riforma, e da ommettersi dopo la medesima, alla qual cosa mira la sottrazione indicata purora: questa diminuzione di 364 volte il numero degli anni precedenti, essendo essa espressa da un multiplo di 7, non può alterare in verun modo l'ultimo risultamento, od il residuo che si ricerca. Valghiamoci intanto di questa regola per verificare che fu giorno di domenica ai 21 marzo 1700, ai 19 marzo 1600, ai 18 marzo 1584, ed ai 16 marzo dell'anno quarto di G. C., siccome si è già supposto in parte, e si supporrà nel resto in appresso. Si avrà

$$\left(\frac{1699+424+81+1}{7}\right)_r = 0$$

$$\left(\frac{1599+399+79-12}{7}\right)_r = 0$$

$$\left(\frac{1583+395+78-12}{7}\right)_r = 0$$

$$\left(\frac{3+0+76-2}{7}\right)_r = 0$$

I residui delle divisioni fatte per 7 sono tutti uguali a zero, ed ognuno di essi indica giorno di domenica. Si è considerato l'anno 1700 come bisestile mettendo in conto 81 giorni dal 1.° gennajo ai 21 marzo, il che dee farsi, siccom'è facile di comprendere.

Regola comune per calcolare la pasqua tanto secondo il calendario giuliano, quanto secondo il calendario gregoriano.

Dividendo	per	si ha il residuo
L'anno dato	19	. . . a
L'anno dato	4	. . b
L'anno dato	7	. . c
La quantità 19 a + M . . .	30	. . d
La quantità 2b + 4c + 6d + *N*	7	. . e

e la pasqua il 22 + d + e *di marzo, od il* d + e — 9 *d'aprile*. M, N (24) *nel calendario giuliano hanno un valore invariabile, e nel gregoriano lo mantengono almeno per* 100 *anni, e però in quello* M = 15, N = 6 *in questo dalla loro introduzione fino al*

Chi pertanto volesse far uso di questa regola per trovare e'', avrà il calcolo della pasqua ancora più facile che colla formola del Gauss, poichè i valori di b, c, N, farannosi inutili, come quelli che implicitamente contengonsi nella regola istessa. Infatti si dimandi la pasqua del 1858, si avrà $a = 15$, $19a + 23 = 308$, $d = 8$, $21 + d = 29$ marzo, $\left(\frac{1857 + 464 + 88}{7}\right)_r = 1$, $e'' = 7 - 1 = 6$, dunque $21 + d + e'' = 21 + 8 + 6 = 35$ marzo = 4 aprile. Nota bene, pel calcolo della pasqua, quando si trovi il residuo mentovato $= 0$, deesi fare $e'' = 7$, poichè $e'' = 7 - 0 = 7$.

(24) Il valore costante di M nel calendario giuliano fu già da noi determinato = 15 sul principio della nota (17). Ci occuperemo adunque in questa di trovare quello

di N, ugualmente costante, da servire al medesimo calendario, seguendo passo passo le tracce del metodo praticato dall' autore, nella investigazione di E, da cui si trae esso valore di N. Vedemmo davanti che ai 16 di marzo dell' anno 4.° di Cristo fu giorno di domenica. Sia questa la scelta da noi per determinare E da cui N, e avverti che si sceglie la domenica di marzo, precedente li 22 dello stesso mese, e di un anno bisestile qualunque di qualsisia secolo (per esser N nel calendario giuliano una quantità costante) tanto per facilitare la sottrazione della sua epoca dal tempo dato, quanto perchè la quantità i che rappresenta il numero de' bisestili riesca un numero intero. Chiamando pertanto, secondo l' autore, A il numero dell' anno dato, ed i il numero dei bisestili dall' anno quarto all' anno A, i sarà al tempo stesso il numero dei giorni intercalari in quell' intervallo di tempo; ed il numero dei giorni dal 16 marzo anno 4.° insino al $22+d+E$ di marzo dell' anno A, quello escluso, questo incluso, sarà $6+d+E+i+365\ (A-4)$ ma $i=\frac{1}{4}(A-b-4)$, dunque sostituendo si avrà l'espressione seguente $6+d+E+\frac{1}{4}(A-b-4)+365$ $(A-4)$ divisibile per 7. Si aggiunga alla medesima per liberarla dal rotto $\frac{7}{4}(A-b-4)$ ch' è un multiplo di 7, e si avrà riducendo $6+d+E+367\ (A-4)-2b$. Sottraggo da questa la quantità $364\ (A-4)$ divisibile per 7, ed ho di resto $6+d+E+3A-2b-12=-6+d+E+3A-2b$, sottraendo ancora $3A-3c$, rimarrà $-6+d+E+3c-2b$, che sottratta da $7c+7d$ dà $6+2b+4c+6d-E$ divisibile pure per 7. Chiaro è adunque che dividendosi per 7 la quantità

$6 + 2b + 4c + 6d$, avvanzerà $E = e$, e che N nel calendario giuliano sarà costantemente uguale a sei.

Troviamo ora il valore di N per un secolo dato nel calendario gregoriano, e sia questo ciò che rimane dopo la riforma nel secolo 16.° dal 1584, al 1599 (scelgo ancora qui un bisestile, ma contenuto nell' intervallo tra il 1582 e il 1599, perchè N nel calendario gregoriano ad ogni quattro secoli, muta il valor suo per tre secoli, e per lo quarto nol muta). Ai 18 marzo del 1584 fu domenica, e però da detto giorno esclusivamente al $22 + d + E$ di marzo inclusivamente dell' anno A, i giorni contenuti divisibili per 7, saranno $4 + d + E + i + 365(A - 1584) = 4 + d + E + \frac{1}{4}(A - b - 1584) + 365(A - 1584) = 4 + d + E + 367(A - 1584) - 2b = 4 + d + E + 3A - 4752 - 2b = d + E + 3A - 4748 - 2b = d + E + 3A - 2 - 2b = d + E + 3c - 2 - 2b = 2 + 2b + 4c + 6d - E$, dunque $N = 2$.

In questo calcolo vennero fatte a un incirca le operazioni dell' esempio precedente, di sostituire cioè il valore di i, di aggiugnere $\frac{7}{4}(A - b - 1584)$, di sottrarre $364(A - 1584)$, di aggiugnere 4746, di sottrarre $3A - 3c$, e finalmente di sottrarre il resto da $7c + 7d$. Dal 1600, al 1699 risulta del pari $N = 2$: mentre scelta che sia la domenica dei 19 marzo 1600, verremo ad avere, operando come sopra, le seguenti equazioni. $3 + d + E + \frac{1}{4}(A - b - 1600) + 365(A - 1600) = 3 + d + E + 367(A - 1600) - 2b = 3 + d + E + 3(A - 1600) - 2b = d + E + 3A - 4797 - 2b = d + E + 3A - 2 - 2b = d + E + 3c - 2 - 2b = 2 + 2b + 4c + 6d - E$, dunque dal 1583 al 1699 nel calendario gregoriano avemmo $N = 2$: non ostante nelle tavole portatili della luna del celebre barone di Zach, che alla

	1699	M = 22,	N = 2
dal 1700	*al* 1799	M = 23,	N = 3
dal 1800	*al* 1899	M = 23,	N = 4
dal 1900	*al* 1999	M = 24,	N = 5
dal 2000	*al* 2099	M = 24,	N = 5
dal 2100	*al* 2199	M = 24,	N = 6
dal 2200	*al* 2299	M = 25,	N = 0
dal 2300	*al* 2399	M = 26,	N = 1
dal 2400	*al* 2499	M = 25,	N = 1

Nel calendario gregoriano si trova generalmente il valore di M, *e di* N *per qualunque secolo dato dal* 100 K *al* 100 K + 99 *colla seguente regola*. K *diviso per tre, e per quattro dia per quoziente* p, *e* q, *trascurati gli ávvanzi, allora* M, N *sono i residui che risultano dividendo* 15 + K — p — q *per* 30, *e* 4 + K — q *per* 7, *respettivamente* (25).

---

pagina 68 (Florence 1809 8.°) sta $N = 3$. L'istesso errore è nel compendio di Astronomia del Sig. Delambre alla pagina 647 (Paris 1813 8.°) ed alla pagina 712 del tomo terzo dell' astronomia teorica, e pratica dello stesso autore (Paris 1814 4.° trois vol.).

(25) A discoprire le vie tenute dal Gauss nel ritrovamento delle formole generali di *M*, *N* qui date, colle quali egli ne determina i valori per qualunque secolo, non è se non giovevole che io ricordi in breve al lettore ciò, che più diffusamente esposi alla nota (17), vale a dire 1.° che quella parte dell' equazione solare per cui in 400 anni si sopprimono tre bisestili, si principiò ad applicarla nel 1700, e che l' effetto della medesima è di posticipare, e ritardare i noviluni, ossia di portarli a mano a

mano verso la fine del mese, onde la medesima potrà analiticamente, e generalmente esprimersi da $K - 16 - \left(\frac{K-16}{4}\right)_i$; 2.° che quella parte dell' equazione lunare per la quale si anticipano i noviluni ogni 300 anni di un giorno, ebbe realmente luogo la prima volta nel calendario gregoriano nel 1800, e l'effetto suo si è di portare i noviluni verso il principio del mese: ora per l' equazione lunare impiegata nel 1800, dovette il Gauss giudicare ch' essa ripetesse il suo principio dal 1500, e però si potesse esprimer da $-\frac{1}{3}(K-15)_i$. Invece poi di 100 K, 1600, 1500, scrisse egli solamente K, 16, 15, non parlandosi qui che puramente di secoli, mentre le dette equazioni solare, e lunare si adoperano soltanto negli anni secolari. Ciò posto esponiamo dapprima come per dopo la riforma il Dottor Gauss trovasse generalmente per qualunque secolo K, il valore di $N = \left(\frac{4+K-q}{7}\right)_r$. Nella nota precedente trovammo $N=2$ pel 1583 al 1699, vedemmo ancora il valore di N dal 1700 al 1799 essere uguale a 3, e dal 1800 al 1899 eguale a 4; Il valore pertanto di N colla soppressione dei bisestili si aumenta, (come osservammo altresì avvenire per le lettere domenicali alla pag. 13. nella dimostrazione della formola di L') . Dicemmo poi i limiti del medesimo esser fra zero e sei, e chiaro è finalmente non aver l' equazione lunare parte veruna in quello, ma solamente l'equazione solare suddetta. Premesso ciò, per un secolo qualunque K dopo la riforma, il valore di N sarà $= 2 + K - 16 - \left(\frac{K-16}{4}\right)_i = 2 + K - 16 - \left(\frac{K}{4}\right)_i$

$+4 = -10 + K - \left(\frac{K}{4}\right)_i$, se aggiungasi a questa ultima 14 multiplo di 7, e sostituiscasi q a $\left(\frac{K}{4}\right)_i$ si avrà $N = 4 + K - q = \left(\frac{4+K-q}{7}\right)_r$ (non potendo essere N maggiore di 6) ch'è quanto era da ritrovarsi.

Presso a poco nella stessa maniera il Gauss trovò $M = \left(\frac{15+K-p-q}{30}\right)_i$. Infatti sia come sopra l'equazione solare $= K - 16 - \left(\frac{K-16}{4}\right)_i$, l'equazione lunare $= -\left(\frac{K-15}{3}\right)_i$, $p = \left(\frac{K}{4}\right)_i$, $q = \left(\frac{K}{4}\right)_i$, giusta la mente dell'autore. Ma poichè subito dopo la riforma del calendario fino al 1699 si trovò da noi $M = 22$; per un secolo qualunque K dopo il 17.^{a} sarà $M = 22 + K - 16 - \left(\frac{K-16}{4}\right)_i - \left(\frac{K-15}{3}\right)_i = 22 + K - 16 - \left(\frac{K}{4}\right)_i + 4 - \left(\frac{K}{3}\right)_i + 5$: riducendo, e sostituendo p e q, a $\left(\frac{K}{3}\right)_i$ e $\left(\frac{K}{4}\right)_i$ si avrà $M = 15 + K - p - q$, ch'è l'espressione identica dell'autore, e che io fo $= \left(\frac{15+K-p-q}{30}\right)_r$ non potendo essere M maggiore di 29.

Nel sistema adottato del calendario gregoriano, il valore di N, avuto generalmente, per qualunque secolo K avvenire, è giusto e senza eccezione, non è però così del valore di M il quale non potrà servire, almeno con sicurezza di non errare, se non fino al 4199, siccome dimostreremo nella nota seguente.

Esempio. Pei 100 *anni dal* 4700 *al* 4799 *è* $K = 47$, $p = 15$, $q = 11$, *dunque* $15 + K - p - q = 36$; $4 + K - q = 40$, *dunque* $M = 6$, $N = 5$; *così per esempio pel* 4763 *è* $a = 13$, $b = 3$, $c = 3$, $19a + M = 253$, $d = 13$, $2b + 4c + 6d + N = 101$, $e = 3$, *la pasqua il* $13 + 3 - 9$, *cioè il* 7 *aprile secondo il calendario gregoriano. Al contrario secondo il giuliano* $19a + M = 262$, $d = 22$, $2b + 4c + 6d + N = 156$, $e = 2$, *la pasqua il* $22 + 2 - 9$, *cioè il* 15 *aprile* (26).

---

(26) Se il Gauss invece di portar qui per esempio l' anno 4763, ne avesse addotto uno preso dagli anni qui appresso notati, spettanti ai secoli 43.° 46.° 49.°, quali sono nel 43.° gli anni 4200, 3, 13, 17, 20, 23, 24, 27, 32, 40, 44, 47, 51, 64, 67, 68, 70, 71, 88, 89, 91, 92, 94, 98.
nel 46.° gli anni 4514, 18, 38, 41, 45, 65, 69, 90.
e nel 49.° gli anni 4812, 13, 15, 16, 19, 32, 36, 39, 43; 46, 51, 56, 59, 60, 63, 66, 70, 80, 86, 89, 90.
e così nel 52.° secolo l' anno 5106, si sarebbe presto avveduto, che calcolandone la pasqua colla sua formola si ha un risultamento falso, e questo perchè falso è il valore di *p*, che serve a trovare quello di *M*. Si potrebbero qui riferire un numero considerevole di anni di altri secoli che soggiacciono alla stessa eccezione, stimo però inutile il farlo, ed in tanto mi è piaciuto di registrare tutti gli eccettuati nello spazio di 906 anni, ossia dal 4200 al 5106, in quanto che essendo già stata calcolata dal Clavio la pasqua, unitamente alle altre feste mobili, di anno in anno dal 1600 al 5000, ognuno con facilità venga a farne il confronto. Potrebbe alcuno richiedere come sia ch' es-

sendo falso il valore di p dal 4200 in poi, nell' intervallo di 906 anni, soli 54 siano fallati dalla formola del Gauss! Rispondo prima che non in tutti i secoli dopo il 4199, il valore di p è falso, ma solamente nei secoli 43.° 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 90. Dopo il 90.° secolo il valore di p risulta falso in ogni secolo fino al 2217.mo nel quale M torna buono, e continua di esserlo per lo spazio di altri 25 secoli, terminati i quali, hanno luogo di bel nuovo tutte le eccezioni riferite, le quali durano fino al secolo 4467.°, e così di mano in mano ad ogni periodo composto di secoli 2250. Ed è tutto ciò da questo, che il valore di p solamente nei secoli indicati dal 43.° al 90.° è difettoso, e tale si mantiene dal 90.° al 2217.° nel quale l' errore suo essendo = 30, restituisce la formola buona per altri 25 secoli, e così sempre va di mano in mano occorrendo ogni 2250 secoli. Il valore poi di p è manchevole pei secoli suddetti, perchè dipendendo esso dall' equazione lunare, questa non si dee impiegare nel principio del secolo 43.°, ossia nel 4200, come l' autore viene a fare, supponendola $= -\left(\frac{K-15}{3}\right)_i$ (not. prec.), ma nel secolo 44.°, ossia nel 4300, giusta le regole del calendario gregoriano. Ne' secoli seguenti 44.°, e 45.° il valore di p ritorna giusto, ma nel secolo appresso ricade nel medesimo errore che incontrò nel secolo 43.°, e così p va divenendo difettoso dal 4200 fino al 6600 alternativamente un secolo sì, e due secoli nò: al 6800, ossia al secolo 69.°, l' errore di p non è più di uno, ma di due secoli, e però dal 69.° al 90.° p si trova che alternatamente per due secoli erra, ma che altrettanto non avvie-

ne nel terzo. Dal 90.° in poi però, essendo l'errore di p di tre secoli, esso continua ad essere in errore in ogni secolo, finchè il difetto suo non arrivi a 30 unità, la qual cosa avrà luogo nel 2217.° secolo, e nuovamente nel 4467.°, nel 6617.° ec. Ciò non ostante sembrerebbe che risultando p fallato, per esempio, nel 43.° secolo, la pasqua calcolata colla formola del Gauss per qualunque anno di quel secolo, dovesse del pari e senza più, riuscire sbagliata. Ma questo appunto è ciò, che io in secondo luogo debbo avvertire, ch'è falso, e che dal 4200 all' 11699, solamente allora la formola fallirà quando si trovi o $d=29$, od $e=0$; nel primo caso la formola posticiperà la pasqua di 28 giorni, e nel secondo l'anticiperà di 7, e se ad un tratto abbiasi $d=29$, ed $e=6$, la posticipazione sarà di giorni 35; ma in tutti gli altri valori di d, e di e la formola sarà giusta. Dall' 11700 al 19199 del pari essendo $d=28$ ovvero 29, si avrà una posticipazione di 28 giorni, ed un anticipazione di 7 giorni se sia $e=0$ ovvero uno: vengono appresso i risultati della formola dall' anno 11700 al 221699.

La formola è falsa

dal 11700 al	19199	essendo	$d=28, 29;$	$e=0, 1$
dal 19200 al	26699		$d=27, 28, 29;$	$e=0, 1, 2$
dal 26700 al	34199		$d=26, 27, 28, 29;$	$e=0, 1, 2, 3$
dal 34200 al	41699		$d=25. \dots 29;$	$e=0, 1, 2, 3, 4$
dal 41700 al	49199		$d=24. \dots 29;$	$e=0, 1, \dots 5$
dal 49200 al	176699	è sempre falsa.		
dal 176700 al	184199	essendo	$d=0, 1, 2, 3, 4, 5;$	$e=0$
dal 184200 al	191699		$d=0, 1, 2, 3, 4;$	$e=0, 1$
dal 191700 al	199199		$d=0, 1, 2, 3;$	$e=0, 1, 2$
dal 199200 al	206699		$d=0, 1, 2;$	$e=0, 1, 2, 3$
dal 206700 al	214199		$d=0, 1;$	$e=0, 1, 2, 3, 4$
dal 214200 al	221699		$d=0;$	$e=0, 1, 2, 3, 4, 5$

Al 221700 comincierà essa, per dir così, un secondo periodo simile al precedente ch' ebbe luogo dal 1700 al 221699, colle stesse ineguaglianze, ed eccezioni fin qui riferite, e lo stesso si dica degli altri successivi periodi all' infinito. Restaci da spiegare perchè non ostante l' errore di p la pasqua calcolata colla formola del Gauss risulti giusta in tutti i casi non indicati nella precedente tabella. E a bene intenderla conviene che si rifletta come l' errore che ritrovasi in p ne produce due nella formola l' uno in d, l' altro in e; il primo per lo più diminuisce di tanto la quantità d, di quanto il secondo accresce quello di e, e perciò si fa una tal qual compensazione nell' ultimo risultamento $22 + d + e$, e si ottiene buono, così per esempio sia p maggiore del vero della quantità 2, allora p (essendo p, nella formola dell' autore, negativo) darà M, e conseguentemente anche $d = \left(\frac{19a + M}{30}\right)_r$ minore di altrettanto; al contrario il valore di $e = 2b + 4c + 6d + N$, diverrà maggiore del vero della stessa quantità due. Infatti sia $\left(\frac{2b + 4c + N}{7}\right)_r = 0$, e il falso $d = 3$, sarà $\left(\frac{6d}{7}\right)_r = e = 4$, e si avrà $d + e = 3 + 4 = 7$; ma il vero $d = 5$ dà $\left(\frac{6d}{7}\right)_r = e = 2$, ciò che torna lo stesso, mentre qui abbiamo $d + e = 5 + 2 = 7$: Ecco come l' errore di e può compensare quello di d: ora ogni volta che l' errore di M passa in quello di d, e quello di $\left(\frac{6d}{7}\right)_r$ nel valore di e senza che circostanze particolari alterino in diversa maniera le quantità di d, e di e, succederà il mentovato compenso. Le dette circostanze poi particolari,

nel caso dell' errore due in p, sono, quando il vero valore di d fosse zero, ovvero uno, che il falso allora diverrebbe 28., o 29., così pure quando il vero valore di e fosse 6, o 5, nel qual caso il falso sarebbe uno, ovvero zero, ed allora non ha luogo compensazione veruna.

Per maggiormente soddisfare la curiosità del lettore, ed in un certo modo abilitarlo a giovarsi della formola del Dottor Gauss, sebbene fallace, per qualsisia anno di qualunque secolo avvenire, senza timore di sbagliare, soggiugneremo qui due metodi co' quali si potranno assai facilmente correggere, o rettificare i risultati della stessa formola, e sarà il primo per mezzo delle tavole terza, e quarta poste in fine. L' uso delle medesime si apprenderà meglio per via di esempi che d' altra maniera. Si cerchi la pasqua del 49657, avrassi $a = 10$, $b = 1$, $c = 6$, $M = 12$, $N = 5$, $d = 22$, $e = 2$, dunque si ha dalla formola $22 + 22 + 2 = 46$ marzo $= 15$ aprile.

Per correggere questo risultato coll' ajuto della terza e quarta tavola occorrono tre argomenti. È l' argomento primo $= 22 + d = 44$, nel caso proposto. Si cerchi nella terza tavola, nella linea orizzontale degli anni 49200 ... 56699, nei quali si comprende l' anno dato, il valore dell' argomento primo $= 44$, trovato il quale si prendono nella sua colonna verticale, superiormente, i due numeri della prima linea orizzontale che gli corrispondono, vale a dire $\overset{6}{51}$, nel nostro esempio. Il numero inferiore 51 si è l' argomento secondo, e mostra il valore corretto di $22 + d$, e serve d' argomento per la quarta tavola, il numero 6 superiore è il residuo corretto di $\left(\frac{6\,d}{7}\right)_r$, e spetta alla prima parte dell' argomento terzo,

la seconda parte dell' argomento terzo è eguale a $\left(\frac{2b+4c+N}{7}\right)_r = \left(\frac{31}{7}\right)_r = 3$, nel caso nostro. Si cerchi ora nella prima linea orizzontale superiore della quarta tavola, il numero dell' argomento secondo $= 51$, ed a sinistra nella prima colonna verticale i numeri 6, 3 dell' argomento terzo: nel concorso orizzontale de' numeri 6, 3 col verticale del numero 51, si otterrà giustamente la pasqua per lo anno dato 49657 ai 53 marzo = 22 aprile, e la correzione della formola in conseguenza sarà $+7$.

Si dimandi ora la pasqua degli anni 19180, 19182, 19185, 19188. Si avrà

pel 19180 $a=9$, $b=0$, $c=0$, $d=27$, $M=6$, $N=1$, $e=2$
pel 19182 $a=11$, $b=2$, $c=2$, $d=5$ $e=1$
pel 19185 $a=14$, $b=1$, $c=5$, $d=2$ $e=0$
pel 19188 $a=17$, $b=0$, $c=1$, $d=29$ $e=4$

darà dunque la formola

pel 19180 la pasqua $22+27+2=51$ marzo $=20$ aprile
pel 19182 la pasqua $22+5+1=28$ marzo
pel 19185 la pasqua $22+2+0=24$ marzo
pel 19188 la pasqua $22+29+4=55$ marzo $=24$ aprile

Ora per gli anni 19180, 19182, 19185, 19188 si ha respettivamente l' arg. I $=22+d$, il quale per la tavola terza dà l' arg. II insiem colla prima parte dell' arg. III; e $\left(\frac{2b+4c+N}{7}\right)_r$ ne dà la seconda parte, colle quali due parti dell' arg. III e col precedente arg. II si otterranno dalla tavola quarta la pasqua, e le correzioni della formola negli anni suddetti come appresso

Arg. I.	49	27	24	51	
Arg. II.	51	29	26	23	
Arg. III.	6.1	0.6	3.2	6.5	
si ha la pasqua ai . .	51	35	31	27	marzo
dalla formola si ebbe	51	28	24	55	marzo
son dunque le correz.	0	+ 7	+ 7	— 28.	

Si potria lasciár fuori l' uso della tavola quarta, e tuttavia si otterrebbe altrettanto, che basterebbe allora di sommare le due parti dell' argomento terzo, e diminuire, dove si possa, le respettive somme di 7, e così diminuite aggiugnerle ai numeri dell' argomento secondo, che tosto le respettive somme daranno i veri valori della pasqua uguali a quelli trovati per mezzo della tavola quarta; e fieno manifeste le correzioni della formola del Gauss. Noi non istaremo qui a dispiegare, e la conformazion delle tavole, e la composizione degli argomenti, mentre sol che si consideri la forma di questi e di quelle, si comprenderà appieno la ragione del metodo esposto fin ora.

L' altro metodo risiede nel correggere la quantità p prima di calcolare il valore di $M = \left(\frac{15+K-p-q}{30}\right)_r$.

Osservando pertanto che il $p = \left(\frac{K}{3}\right)_i$ posto in opera dall' autore, dopo il 4199 è sempre una quantità maggiore del vero valor suo, e che p nell' espressione di M ha il segno negativo, ne risulta che sottraendosi p da $15 + K - q$, si sottrae una quantità maggiore del dovere, la qual cosa diminuisce il valore di M, e perciò se noi aggiugneremo alla quantità $15 + K - q - p$ l' errore di p chiamandolo R, risulterà il valore giusto di $M=$

$\left(\frac{15+K-q-p+R}{30}\right)_r$; proveremo quindi più sotto che $R=\left(\frac{33+K}{75}\right)_i$. Laonde se si cerchi M per lo anno 109347, aggiunto 33 a $1093=K$, si avrà la somma 1126, la quale divisa per 75 dà di quoto $15=R$, dunque $M=\left(\frac{15+K-q-p+15}{30}\right)_r=$ $\left(\frac{30+1093-273-364}{30}\right)_r=\left(\frac{1123-637}{30}\right)_r=$ $\left(\frac{486}{30}\right)_r=6$. Si calcoli ora la formola del Gauss con $M=6$, e si otterrà senza sbaglio il tempo della pasqua, e detto valore di $M=6$ potrà servire dal 109300 al 109399. Che poi sia $R=\left(\frac{33+K}{75}\right)_i$ consiegue da questo, che l' errore di p aumentandosi dell' unità ad ogni 75 secoli, e il primo aumento succedendo nel 42.° compito; se ai secoli K si aggiugnerà 33 secoli complemento a 75 di 42, ne sorge che $\left(\frac{33+K}{75}\right)_i$ debba dare un quoziente, trascurato il resto, uguale all' errore di p. Nella tavola terza sono belli che calcolati gli errori di p nella prima colonna verticale a sinistra.

Anzichè tener dietro ai due metodi precedenti per correggere la formola di Gauss, meglio fia certamente di rinunciare alla sua espressione di $M=$ $\left(\frac{15+K-q-p}{30}\right)_r$, e cercarne in luogo di lei una nuova, giusta, e rigorosa: allora la regola di Gauss diverrà buona ed universale. Ad ottenere pertanto questa desiderata espressione di M, ecco un mezzo facile, e pu-

ramente analitico; il quale sta tutto nell' osservare, che la correzione dell' epatta giuliana pe' secoli dopo la riforma, trovata da noi alla pag. 23, quantunque di segno contrario, debb' esser uguale in quantità, alla correzione di $M = 15$ che adopera il Gauss pel calendario giuliano, affinchè da questa si ottenga il valore di M pel calendario gregoriano, sempre, pel tempo avvenire, senza errore: In guisa tale, che diviene $0,43\,K + 0,25\,b' + 0,44 = K - q - p$ da cui si cava facilmente il giusto valore di p*, cioè $p = 0,32\,K - 0,44$ espressione, che corregge a meraviglia quella di $p = \left(\frac{K}{3}\right)_i$, impiegata dal Gauss, che è fallace. Invece adunque di $M =$

$$\left(\frac{15 + K - q - p}{30}\right)_r \text{ si avrà } M =$$

$$\left(\frac{15 + K - q - 0,32\,K + 0,44}{30}\right)_r =$$

$\left(\frac{15,44 + 0,68\,K - q}{30}\right)_r$, e sostituendo a q la quantità $\frac{K - b'}{4}$ che gli è uguale si avrà $M =$

$$\left(\frac{15,44 + 0,68\,K - 0,25\,K + 0,25\,b'}{30}\right)_r =$$

$\left(\frac{15,44 + 0,43\,K + 0,25\,b'}{30}\right)_r$ ch' è l' espressione di M corretta, e ricercata da noi. Facciamone l' applicazione all' ultimo esempio dove $K = 1093$, $b' = 3$, e però $M =$

$$\left(\frac{15,44 + 0,43 \,.\, 1093 + 0,25 \,.\, 3}{30}\right)_r = \left(\frac{486,18}{30}\right)_r =$$

$\left(\frac{6,18}{30}\right)_r = 6$ come sopra.

Faremo di presente una breve disgressione a questa nota, cadendo in acconcio di dar qui la dimostrazione di ciò che promettemmo alla pag. 37. , vale a dire delle due formole $d = \left(\frac{23 + \varepsilon}{30}\right)_r$,

$$e = \left(\frac{3 + L + 6d}{7}\right)_r$$ per le quali data l' epatta, e la lettera domenicale di un anno, se ne calcola facilmente la pasqua. Avendosi secondo l' autore

$d = \left(\frac{19a + M}{30}\right)_r$, e secondo si è trovato purora

$M = \left(\frac{15,44 + 0{,}43K + 0,25b'}{30}\right)_r$, sarà

$d = \left(\frac{19a + 15{,}44 + 0{,}43K + 0{,}25b'}{30}\right)_r$. Inoltre essendo

$N = a + 1$, e per l' ottava delle nostre formole l' epatta gregoriana

$E' = 30 - \left(\frac{19N + 0,43K + 0,25b' + 3,44}{30}\right)_r$ se sostituiscasi in questa $a + 1$ ad N, si avrà

$$E' = 30 - \left(\frac{19a + 19 + 0,43K + 0,25b' + 3,44}{30}\right)_r$$

dove mettendo $-d$ in luogo di

$$-\left(\frac{19a + 0{,}43K + 0,25b' + 15,44}{30}\right)_r,$$

verrà $E' = 23 - d$, e però $d = 23 - E'$; ma noi abbiamo altrove (pag. 24.) osservato, che dalla quantità $-E'$ vien sempre indicato il complemento a 30 dell' epatta E', cosicchè si ha invariabilmente $-E' = 30 - E'$, però fatto $\varepsilon = 30 - E' = -E'$, e sostituito in luogo di $-E'$

Alla precedente regola s' accoppiano due eccezioni, e la prima è questa, che se il computo dà la pasqua al 26 aprile, si prende sempre, invece del 26, il 19 (27):

---

si avrà $d = 23 + \epsilon = \left(\frac{23+\epsilon}{30}\right)_r$, che è la prima delle due espressioni ch' era da dimostrarsi.

Veniamo ora alla seconda. Avemmo dall' autore $e = \left(\frac{2b+4c+6d+N}{7}\right)_r$ ed $N = \left(\frac{4+K-q}{7}\right)_r$; sostituendo in questa $\frac{K-b'}{4}$ a q, sarà $N =$

$$\left(\frac{4+K-\frac{K-b'}{4}}{7}\right)_r =$$

$$\left(\frac{4+K-\frac{7K-7b'}{4}-\frac{K-b'}{4}}{7}\right)_r =$$

$$\left(\frac{4-K+2b'}{7}\right)_r = \left(\frac{4-c'+2b'}{7}\right)_r = \left(\frac{4+6c'+2b'}{7}\right)_r,$$

messo questo ultimo valore di N nell' equazione di e, si avrà $e = \left(\frac{4+2(b+b')+4c+6d+6c'}{7}\right)_r$

ma dimostrammo alla pag. 15. $L' =$ $\left(\frac{1+2(b+b')+4c+6c'}{7}\right)_r$, fatta dunque la sostituzione di L' nell' ultima equazione di e, si avrà

$e = \left(\frac{3+L'+6d}{7}\right)_r$ ch' è quanto conveniva a noi di provare.

(27) L' origine della mentovata eccezione dipende al

ed è manifesto che questo caso non avrà luogo che quando il calcolo dia d = 29, *ed* e = 6; d *poi allora soltanto avrà il valore* 29, *quando dividendo per* 30 11 M

---

tutto dalla distribuzione dei numeri d' oro fatta secondo la regola data dal Gauss. E di vero, ch' ove si osservi nella tavola seconda i 19 numeri d' oro del mese di marzo così disposti, si vedrà ch' essi occupano l' intervallo di 30 giorni contati dal primo al 30 di marzo, il che è consentaneo ai canoni del calendario gregoriano, che fa la luna di marzo, parlando in universale, di 30 giorni: dovendo poi la luna di aprile esser di giorni 29, ne segue necessariamente che i 19 numeri d' oro nella luna di aprile non possano occupare se non l' intervallo di 29 giorni, ma la distribuzione loro richiede l' intervallo di 30, dunque essa nel mese di aprile dee soggiacere ad una qualche eccezione dalla stabilita regola del Gauss: E più manifesto si vede ciò nella tavola dei 30 calendari suddetti, osservando i numeri d' oro dei 4, e 5 aprile; imperciocchè se sia M = 24, 29, 2, 5, 10, 13, 16, 21, essi eccoli fuor di posto. Sia per esempio M = 24, poichè i numeri d' oro corrispondenti ai 17, 18 marzo nella colonna che spetta ad M = 24 sono 16, e 5 aggiugnendo a questi, giusta la regola, il numero 19, avremo i numeri d' oro loro susseguenti 17, 6, corrispondenti ai 36, 37 marzo, ossia ai 5, o 6 aprile, e in vece sono essi notati nei giorni 4, 5, aprile, e lo stesso avviene degli altri 7 valori di M = 29, 2, 5, 10, 13, 16, 21. Allorchè poi si abbia il valore di M = 25, 27, 0, 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19, 22, il solo numero d' oro dei 5 aprile più non sarà al luogo suo, vale a dire che cor-

$+ 11$, *si abbia un residuo minore di* 19: *a tal fine dovrà* M *aver uno dei seguenti* 19 *valori* 0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29 (28).

---

risponderà al 5 quello che secondo la mentovata regola avrebbe a corrispondere al 6 di aprile. Da tutto ciò pertanto deriva l'eccezione dall'autore esposta pel calcolo della pasqua: si determina questa colla formola alla prima, come se la disposizione dei numeri d'oro dagli 8 marzo ai 5 aprile fosse regolare, ma noi vedemmo purora che in 19 casi il numero d'oro dei 6 aprile è stato avvanzato di un giorno verso il principio del mese, dunque allora che abbiasi $22 + 29 + 6$, ossia $d = 29$, $e = 6$, si dovrà prender la domenica precedente, ossia il 19 invece del 26 aprile. Nei casi di $d = 29$, $e = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ non ha luogo l'eccezione, perchè l'errore di d è compensato dall'errore di e: secondo, che nella nota precedente, abbiamo dichiarato.

(28) Non è difficile da $\left(\frac{19a + M}{30}\right)_r$ di trovare i 19 suddetti valori di M che diano $d = 29$, poichè sostituendo i valori diversi di $a = 1, 2, 3 \ldots$ fin'a 18 nell' espressione $\left(\frac{19a}{30}\right)_r$, si avrà $M = 29 - \left(\frac{19a}{30}\right)_r$.

Ad ottenerli però col mezzo dell'algebra indeterminata, (il che ci gioverà in appresso) basterà istituire l'equazione seguente $\frac{19a + M}{30} = Q + \frac{29}{30}$, la quale dà $M = 30Q + 29 - 19a$, e nella quale posto $a = 0, 1, 2, 3, \ldots$ fin'a 18, e preso Q tale che risulti M positivo, e < 30,

Venendo ora alla seconda eccezione, dico avvenir la medesima, allora, che s' abbia dal calcolo d $= 28$, *e* $= 6$, *aggiunta la condizione, che* 11 M + 11 *diviso per* 30, *dia un residuo minore di* 19. *La pasqua allora non*

---

essendo $a =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
sarà $M =$	29,	10,	21,	2,	13,	24,	5,	16,	27,	8,

$a =$	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18
$M =$	19,	0,	11,	22,	3,	14,	25,	6,	17

i quali valori di M sono esattamente quelli dati dal Gauss.

Affine poi di formarsi una norma universale da discoprir facilmente quando divenga $d = 29$, prescrive l'autore di osservare se $\left(\frac{11\,M + 11}{30}\right)_r$ sia minore di 19, mentre ciò succede soltanto nei 19 valori di M da noi or' ora determinati. E qui si desta la curiosità a rilevare, come abbia egli trovato il termine generale (mi sia permesso di così chiamarlo) $\left(\frac{11\,M + 11}{30}\right)_r$; io lo tentai del modo seguente, e mi venne fatto col riprender l' ultima equazione $M = 30\,Q + 29 - 19\,a$, che multiplicandola per 11, dà $11\,M = 11.30\,Q + 11.29 - 11.19\,a = 330\,Q + 319 - 209\,a$, e dividendo per trenta il membro a destra si avrà $11\,M = 30(11\,Q + 10 - 6a) + 19 - 29\,a$. Laonde facendo $(11\,Q + 10 - 6\,a) = Q'$, e aggiungendo $11 - 11 + a - a$ avremo $11\,M = 30\,Q' + 19 - 29\,a + 11 - 11 + a - a = 30\,(Q' + 1 - a) - 11 + a$, ossia (fatto $Q'' = Q' + 1 - a$), $11\,M = 30\,Q'' - 11 + a$, ed $11\,M + 11 = 30\,Q'' + a$, e dividendo per

cadrà più nel 25, *come segue dal calcolo, ma nel* 18 *aprile. xhiaro è peraltro, che questo caso non* [illegible]*rà che nei secoli, nei quali* M *abbia uno dei seguenti*

---

30 risulterà $\frac{11 M + 11}{30} = Q'' + \frac{a}{30}$, ora essendo $Q'' =$ $\left(\frac{11 M + 11}{30}\right)_i$, sarà $\left(\frac{11 M + 11}{30}\right)_r = \left(\frac{a}{30}\right)_r = a$; ma il valore di a è sempre minore di 19, ed in questa ultima equazione si vede manifestamente, che a è il residuo di $11 M + 11$ diviso per 30, ed è essa inoltre conclusa da quella direttamente, dalla quale avemmo i 19 valori di M, che danno $d = 29$, dunque i valori di M che sostituiti nel termine generale $\left(\frac{11 M + 11}{30}\right)_r$ danno un residuo minore di 19, sono appunto quelli che danno $d = 29$. Si sostituiscano infatti i 30 valori di M da zero a 29 nell' espressione $\left(\frac{11 M + 11}{30}\right)_r$, si avranno i 30 seguenti residui

11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1,
12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29, 10, 21, 2,
13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 0

corrispondenti ai valori di $M =$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21,
22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29

otto valori, 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29. ***Tranne queste due eccezioni le precedenti regole sono pienamente generali*** (29).

---

tra i quali i numeri punteggiati sono quei che danno $d = 29$, e vedrassi come i loro corrispondenti nelle prime tre file, punteggiati del pari, siano minori di 19.

(29) Collo stesso metodo del precedente si trovano i valori che danno $M=28$, facendo $M = 28 - \left(\frac{19a}{30}\right)_r$. Operando poi algebraicamente come si è fatto poc' anzi sarà $\frac{19a + M}{30} = Q + \frac{28}{30}$, e prendendo il valore di M, si avrà $M = 30Q + 28 - 19a$, e posto $a = 0, 1, 2 \ldots$ fin'a 18, e Q tale che si ottenga $M < 30$, e positivo avremo corrispondenti ai valori di

$a=$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
quelli di $M=$	28,	9,	20,	1,	12,	23,	4,	15,	26,	7,

$a=$	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18
$M=$	18,	29,	10,	21,	2,	13,	24,	5,	16.

La ragione poi della condizione aggiunta dall'autore a questa seconda eccezione, vale a dire che $\left(\frac{11M + 11}{30}\right)_r$ sia < 19, risulta chiaramente dalla nota (27), dove abbiamo osservato ch'essendo $M = 24, 29, 2, 5, 10, 13, 16, 21$, i numeri d'oro che secondo la legge della distribuzione loro, accascherebbero ai 5, sono segnati invece ai 4 aprile; ed appunto sostituiti i 19 valori di M testè trovati, e che danno $d = 28$, so-

stituiti dico in $\left(\frac{11\,M+11}{30}\right)_r$ i soli otto predetti 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29, danno il residuo < 19.

E qui si avverta che l'autore non dice che i residui rappresentati da $\left(\frac{11\,M+11}{30}\right)_r$ che si ottengono minori di 19, indichino i 19 valori di M che danno $d = 28$, e realmente questo non ha luogo con $\left(\frac{11\,M+11}{30}\right)_r$ bensì con $\left(\frac{11\,M+22}{30}\right)_r$ espressione trovata da noi collo stesso metodo col quale trovammo poco fa quella di $\left(\frac{11\,M+11}{30}\right)_r$, colla quale avemmo i residui < 19 corrispondenti ai valori di M che danno $d = 29$.

L'autore adunque intanto impiega $\left(\frac{11\,M+11}{30}\right)_r$ anche per la seconda eccezione, inquanto che questa s'incontra appunto, quando abbiasi $M = 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29$, i quali otto valori sono del pari tra i diciannove valori di M che formano la prima eccezione. Del rimanente sarebbe stato assai più semplice, secondo me, a dire che la seconda eccezione, abbia luogo soltanto allora, che si trovi $d = 28$, $e = 6$ colla condizione che sia $a > 10$. E ciò combina del pari colla regola del calendario gregoriano, la quale prescrive che dell'epatte 25, XXV che sono notate ai 4, e 5 aprile respettivamente, si faccia uso della prima, se il numero d'oro sia > 11 e di XXV se minore, e avviene per questo che abbiamo $a > 10$, e non > 11, perchè a nella formola del Gauss è uguale al numero d'oro, diminuito dell'unità. Se non che vedesi al primo tratto le due mentovate eccezioni

nella tavola seconda, notandosi in essa i numeri d'oro appartenenti ai 5 aprile, e corrispondenti ad $M = 24$, 25, 27, 29, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22 tutti fuori di luogo, e portati di un giorno verso il principio del mese, siccome accade dei numeri d'oro dei 4 aprile che rispondono ad $M = 24$, 29, 2, 5, 10, 13, 16, 21.

Nella stessa tavola indicammo con un puntino tra i valori di M quelli, che costituiscono la prima eccezione, tra i quali con due, gli otto che formano la seconda; e lo stesso facemmo nei valori di $\left(\frac{11M+11}{30}\right)_r$, in tantochè si osservi tra questi, che i punteggiati sono tutti minori di 19.

Una cotanta anomalia nella distribuzione de' numeri d'oro pei giorni 4, 5 aprile deriva, come si è detto, da questo, che la luna d'aprile ha 29 giorni, e che la distribuzion regolare di essi ne chiede 30. A voler ora intendere la ragione, onde a metterla in opera si siano piùtosto scelti detti due giorni 4, 5 che altri due qualunque d'aprile diremo esser stata questa: Che prima della riforma del calendario tale fu il costume della chiesa, pel quale, senza dubbio, vie meglio si ottenne, che la luna pasquale risultasse di 29 giorni, eccettuati non ostante, alcuni pochi casi, i quali però sono sempre in minor numero di quello sarebbero, se si fosse operato diversamente. E di vero che niuna eccezione non s'incontrerebbe nel calcolo della pasqua, se la luna di lei fosse stata di 30 giorni, ma i riformatori non attentarono giustamente ad alterar anche in menoma parte, l'uso adottato fino dai primi secoli della chiesa.

Ma a chiuder pur finalmente queste mie illustrazio-

ni qualunque sieno, dirò qui da ultimo essere io stato da non poco stupor compreso, osservando, che tanto il Barone di Zach, quanto il Delambre, riportarono questa seconda eccezione della formola del Gauss, quasi la Pasqua non potesse accascare ai 25 d'aprile, ch'è error madernale nella dottrina del calendario. Senonchè non fu questo certamente, come vedemmo, ch'egli dicesse il Gauss; e a me piacque frattanto di render noto ch'egli nol disse.

OSSERVAZIONI

CRITICHE

DI LODOVICO CICCOLINI

SU QUANTO SCRISSE DEL CALENDARIO

IL DELAMBRE.

AL BENIGNO LETTORE.

Il fine che io mi proposi dettando queste mie osservazioni, fu quello principalmente di correggere alcuni luoghi fallati, e d' illustrarne alcuni altri, che abbisognavano di schiarimento, affinchè il pubblico traesse maggior profitto dagli scritti di sì celebre autore. Ed essendo, che mi paresse di non passare sotto silenzio la noncuranza, e direi quasi il disprezzo ch' egli manifestò ad ora ad ora pel calendario gregoriano, giudicai di dare insieme alle osservazioni suddette quei passi, i quali o direttamente, o indirettamente si oppongono all' uso di quello, e di non lasciarli senza risposta, cosa utile a farsi sopratutto pe' giovani affinchè non dessero in qualche errore. E perciocchè in tre diversi tempi dette fuori l' autore quelle opere, nelle quali trattò ancora del calendario, così in queste osservazioni andrò io seguitando l' ordine col quale dette opere vennero a luce: incominciandole sul suo compendio d' astronomia, e continuandole via via sull' astronomia teorica e pratica, e per ultimo sopra una memoria di lui inserita nella conoscenza de' tempi pel 1817. Quantunque, finalmente, correggesse l' autore, nella memoria suddetta, alcune cose dette prima nell' astronomia teorico pratica, ed anche in questa ne rettificasse alcune altre che si trovano nel compendio, ciò non ostante facendosi vantaggioso a chi non possiede tutte tre le mentovate opere di aver le correzioni divisamente, divisamente le ho scritte, citando per ordine la paginazione loro, e non ommettendo di notare le correzioni fatte

quindi da lui : ho notato ancora e corretto gli errori di stampa, perchè vengan essi tolti via in una nuova edizione .

Sappia per ultimo il lettore, che questo scritto gli riuscirà anzi che nò nojoso, e di poco o nessun vantaggio, se non abbia le opere soprallegate del Delambre: allo studio delle quali, per quello che spetta alla dottrina del calendario, debb' esser unito .

Note alla lezione XXV sul calendario che sta nell'*Abregé d'Astronomie par M. Delambre*. *Paris Courcier* 1813 *vol.* 1. *in* 8.°

Pag. 640. lin. ult. *Cette méthode était bien barbare, mais il faut la connaître pour entendre une expression des calendriers modernes*. Intende qui l'autore di parlare dell'espressione dell'anno *bisestile*, che nasce dal » bissexto Kalendas » dell'antico calendario Romano: ma parla in modo come se l'addotta da lui fosse la sola ragione di aver contezza di esso calendario, di che le colte persone si maraviglieranno non poco.

Pag. 643. lin. 29. *Rien de plus simple que le calendrier réglé sur l'année solaire; rien de plus compliqué que le calendrier ecclésiastique, qui a voulu accorder la semaine, le mois lunaire, et la révolution tropique du soleil*. Non so quanto giustamente in questo luogo si dica che nulla vi sia di più complicato del calendario ecclesiastico, dopo che manifestamente si è veduto, ch'egli può esser compiutamente espresso da poche formole analitiche, facili da calcolare.

Pag. 645. lin. 6. $7n - 7.281 - 4 = 7.281 - 7.280 - 4 = 7 - 4 = 3$. A fare che queste equazioni si accordassero tra loro dovea dirsi $7n - 7.281 - 4 = 7.282 - 7.281 - 4 = 7 - 4 = 3$.

lin. 10. $7n + 6 - 1813 - 453 + 3 - \frac{1}{4}(3) = 7n - 2266 + 9$, dee dire invece $7n + 6 - 1813 - 453 + 2 - \frac{1}{4}(2) = 7n - 2266 + 8$.

lin. 11. $7n - 2257 = 7n - 7.322 + 3 = 3 = C$. Correggasi $7n - 2258 = 7n - 7.322 - 4 = 3 = C$.

Pag. 645. lin. 13. $7n + 6 - 1812 - 453 + 3 - \frac{1}{4}(3) = 7n + 9 - 2265$, dee dire invece $7n + 6 - 1812 - 453 + 2 - \frac{1}{4}(2) = 7n + 8 - 2265$.

lin. 14. $7n - 2256 = 7n - 7.322 - 2 = 7 - 2 = 5 = E$, si legga $7n - 2257 = 7n - 7.322 - 3 = 7 - 3 = 4 = D$. L' autore negli esempi precedenti ha commesso più errori, il primo di far l'equazione pei bisestili soppressi negli anni 1812,13 di 3 ch' è di due; col secondo compensa il primo pel 1813, mettendo (alla lin. 11) $+3$ in luogo di -3; l' ultimo di credere che la sua formola negli anni bisestili dia la lettera domenicale, che serve fino ai 24 febrajo, e non quella che si adopera per lo resto dell'anno, il ch' è falso, contenendosi in essa formola il bisestile dell' anno per cui vien calcolata, come si può conoscere dal dato esempio del 1812. Alla pag. 698 però del tom. 3.° dell' astron. teor. prat. calcola egli coll' istessa formola la lettera domenicale pel 1808, e giustamente. Ommetto la dimostrazione delle due formole suddette, sembrandomi, che le date da me alla pag. 5 e 6 siano da preferirsi: comunque però sia, il lettore potrà vederla alla pag. 697, e seg. del tom. 3.° testè citato.

lin. 17. *Nous supprimons comme peu utiles, et trop compliquées, les régles qui servent à trouver le cycle solaire, le nombre d' or, l' indiction, et l' epacte.* Che le regole per trovare l' epatte siano alquanto complicate lo vogliam concedere (quantunque le nostre formole mostrino il contrario), ma che lo siano quelle che servono a determinare i tre cicli ricordati, nò certamente. Quanto poi all' utilità loro ne ragioneremo in fine di questo scritto.

Pag. 645. lin. 25. *La lune pascale peut différer d'un jour ou deux de la lune vraie, et de la lune moyenne des tables astronomiques; de là de nombreuses réclamations qui arrivent toutes les fois que les imperfections des épactes font retarder, ou avancer d'un mois la fête de pâque.* Sottoponendo il calendario, quanto alla pasqua, alle condizioni richieste dall'uso dei primi secoli della chiesa, ha il Clavio dimostrato che i ritardi, de' quali si tratta sono bensì inevitabili, ma che dal metodo gregoriano sono renduti assai rari, ed in numero sempre minore di quello s' incontrerebbero per qualunque altro metodo. Vedi Clavio Tom. V. pag. 352 ediz. di Magonza dov' ei prova. *Nullum cyclum posse omnia incommoda vitare*, e poco dopo spiega *cur nullus cyclus motibus coelestibus penitus respondere possit*. Quanto poi ai ricorsi summentovati, eglino non sono d' impaccio nè 'l possono a quanti della dottrina del calendario hanno buona ed intera notizia.

Pag. 647. lin. 1.ª *Mais comme les épactes n' ont plus aujourd' hui d' autre usage que de déterminer la fête de pâques, qui regle toutes les autres fêtes mobiles, nous remplacerons toute cette doctrine surannée par une formule de M. Gauss.* Ci sia qui permesso il dimandare. E cosa farem noi delle formole delle lettere domenicali dell' autore, disgiunte dall'uso dell' epatte? Inoltre quando che la dottrina di queste inventata da poco più di due secoli sia per lui invecchiata, quella delle lettere domenicali, che conta un' epoca di circa 2000 anni, non avrebb' ella ad essere risguardata per esso come decrepita? Frattanto al tempo stesso che il Delambre ha a vile la dottrina dell' epatte, chiamandola, contro il sentimento pressochè universale dei dotti, *doctrine surranée*,

ed all' uso di quella sostituisce la formola di Gauss, commette un errore massimo, cioè dire, che allora quando si abbia dal calcolo di questa la pasqua ai 25 d'aprile, debbesi prendere il giorno 18, ch' è come chi dicesse la pasqua non poter occorrere ai 25 d'aprile, la qual cosa non disse il Gauss, ed è falsa. Nella sua astronomia teorico pratica ei cade pure nello stesso errore, e solo nella conoscenza dei tempi pel 1817 lo corregge. E qui si conosce quanto sia mai pericoloso il voler levar via i metodi antichi facili e piani, per altri sostituirne trovati di nuovo, e non noti abbastanza. Io vorrei trattenermi tuttavolta dal rimproverare il Delambre, che male avesse interpetrato la seconda eccezione del Gauss, se non si trattasse in questo luogo di un punto fondamentale del calendario, che ognuno potria cadere in inganno, e molto ci conviene perciò di esser cauti nel propor cose nuove.

Pag. 647. lin. 20. *Si le calcul donne le 25, ou le 26 avril, retranchez 7 jours*. Si dee correggere così. » Se il calcolo dia il 25 aprile, e sia $a > 10$, si prenda in vece il 18, e quando dal calcolo abbiasi il 26 aprile si prenda il 19. »

lin. 25. . . . . . 22. . . 3. Leggasi . . . . . . 22. . . 2.

Pag. 648. lin. 18. *Cette période* (julienne) *n'a plus aucune utilité depuis la réformation grégorienne*. La differenza che vi ha tra l'anno gregoriano, e l'anno giuliano non esclude l'uso del periodo giuliano, e non lo altera punto, perchè esso dipende interamente dai numeri de' tre cicli solare, lunare, indizione romana, i quali dopo la riforma continuano il corso loro, e si calcolano dell'istesso modo che avanti di lei. Quindi è che po-

tremo sempre riferire al periodo giuliano un anno qualunque dell'era nostra del tempo avvenire, come del tempo trapassato. Co' soli Russi ci troveremo discordanti di un' anno nel secolo 490.mo, il che non toglie che il periodo suddetto non sia utile dalla riforma in poi, come sostiene il Delambre: e sarà allora ugualmente facile il distinguere gli anni del periodo giuliano del vecchio, e del nuovo stile, siccome distinguiamo tuttora, quando occorra, il vecchio e 'l nuovo stile pe' giorni dell' anno. Inoltre affermando l' autore in questo luogo, che detto periodo non arreca alcun vantaggio dopo la riforma gregoriana, non viene egli implicitamente a concedere, che in qualche modo ne arrecasse innanzi la medesima? Ma ciò non regge, essendo che il periodo giuliano rivenne in luce per opera dello Scaligero solo dopo la riforma suddetta, mentre prima di lei fu in uso soltanto presso i greci, i quali, secondo il Petavio, lo denominavano periodo costantinopolitano, ed antiocheno: forse egli intende, che il periodo giuliano si renda utile pe' tempi avanti la riforma, in quanto che ad esso possano riferirsi essi tempi. Tuttavia stimò egli ben fatto, di non ripetere questo luogo da me riportato, nè nella sua astron. teor. prat., nè nella conoscenza de' tempi pel 1817.

Note al cap. XXXVIII sul calendario che sta nel tomo terzo dell'*Astronomie theorique et pratique par M. Delambre*, *Paris Courcier* 1814 *Vol.* 3 *in* 4.

Pag. 688. lin. 7. *ou de* $\frac{3M+1}{7}$ il ch'è falso, forse dovea dire, *ovvero di* $3M+1+\frac{3M+1}{7}$.

Pag. 689. lin. 34. *Les grecs divisaient le mois en trois décades, usage qui étoit plus commode que celui de la semaine, et que cependant on a vainement tenté de renouveler de nos jours dans le calendrier de la France*; ed altrettanto disse all'incirca alla pag. 639 l. 12 del compendio, donde si rileva la poca soddisfazion che dovette aver il Delambre, nel veder, che lo annientamento del calendario gregoriano, durasse per così poco tempo in Francia; e questo ci cureremo solo di averlo notato.

Pag. 691. lin. 1. *Les deux jours qu'on a mis de moins à février par des raisons qui ont perdu toute leur importance, ont nécessité un arrangement bizarre et difficile à retenir*. Si lagna qui l'autore che febrajo non abbia che giorni 28, la qual cosa, secondo lui, ha prodotto una disposizione bizzarra e difficile da imparare. Difficile da imparare poi, nò certamente, essendo che perfino dalla gente rozza, e dai campagnoli, questa, quantunque bizzarra disposizione, è assai ben conosciuta.

Pag. 695. lin. 38. *Quelques savants avaient été consultés sur la forme à donner à cette année qu'on voulait établir malgré eux, mais en leur demandant des avis,*

on posait des bases dont il ne leur était pas permis de s' écarter. La qual cosa poco si accorda con quel ch' eì dice alla pag. seg. lin. 22. *Nous aurions pu trouver dans le comité d' instruction publique, un autre rapporteur; mais celui au quel nous nous adressâmes n' osa proposer aucune réforme, de peur qu' on ne supprimât tout a fait ce calendrier* (republicain) *au lieu de le corriger*. Dal num. 27 al num. 33, ossia dalla pag. 695 alla 697, vi si scopre inoltre una certa tal qual dubbiezza nell' animo dell' autore relativamente alla forma che avrebbe dovuto darsi al nuovo cal. fran. rep., ed il solito genio di lui di alterare il cal. greg.

Pag. 698. lin. 6. *Il faut retrancher la correction* $\frac{3}{4}(S-16)$; Questa espressione è falsa, infatti si calcoli colla medesima la correzione ex. gr. dei secoli 21, 22, 23, 24, e si troverà di $-3\frac{3}{4}$, $-4\frac{2}{4}$, $-5\frac{1}{4}$, -6 respettivamente, quando sappiamo già, dover essere della quantità -4, -5, -6, -6. La detta formola pertanto manca del termine $\left(\frac{S}{4}\right)_r$, e debb' essere espressa così $-\frac{3}{4}(S-16)_i - \left(\frac{S}{4}\right)_r$, ovvero nel modo seguente $-(S-16)+\left(\frac{S-16}{4}\right)_i$ che fortunatamente è l' impiegata nel resto del calcolo dall' autore.

lin. 10. *En rejetant les fractions*, ed alla linea 15, *on peut porter cette réduction avec un signe contraire*. Questa maniera di esprimersi mi sembra che lasci il lettore incerto, se debba, o nò trascurarsi le frazioni, e applicare col segno contrario la riduzione di cui si parla: Per la qual cosa torna meglio il

dire che debbesi negliger la frazione, e impiegar con segno contrario la riduzione suddetta.

Pag. 698. lin. 29. *Pour les trois derniers mois était* C, correggi, come poco dopo si esprime „ dopo il 15 ottobre „.

Pag. 700. lin. 32. 1682, leggi 1582.

lin. 36. *Augmentée*, dee dire *diminuita*, poichè in questo luogo si ragiona retrogradando da dicembre a gennajo del 1582, ed è manifesto che se la soppressione dei 10 giorni aumentò la lettera domenicale $G = 0$ di tre per cui dopo il 15 ottobre dello stesso anno si mutò in C, di altrettanto debb' esser diminuita questa per ottener quella: ed in vero aumentando C di tre unità, secondo la mente dell' autore, si avrebbe F, e non G, dove C diminuita di tre dà G.

Pag. 701. lin. 3. 540, leggi 544.

lin. 12. 1796 *B C*. leggi 1796 *C B*.

Pag. 702. lin. 5. *De la première à la dernière du siecle*, *n devient* $n - 3$, *ou* $n + 4$ ec. È d'uopo interpetrare così. Chiamisi K un secolo qualunque dopo la riforma, allora, posto l'anno $K + 100$ comune, si avrà

da $K+1$ a $K+99$ n diviene $n-3$, ovvero $n+4$
da $K+1$ a $K+100$ n diviene $n-4$, ovvero $n+3$
da $K+1$ a $K+101$ n diviene $n-5$, ovvero $n+2$

Pag. 703. lin. 28. *Ce cycle allait donc fort bien avec l' année julienne, on s' en servait pour déterminer la lune pascale*. E di vero che se questo ciclo fosse andato sì bene come dice l'autore, sarebbe stato una gran follia il correggerlo: i fatti però si oppongono manifestamente all'opinione di lui. Imperciocchè dal concilio Niceno all'epoca della riforma, mediante l' uso di questo

stesso ciclo, aveano i noviluni un errore di quattro giorni, ed uno di 10 l'equinozio, e contando anche per nulla, a tenore del sentimento dell'autore, lo traslocamento dell'equinozio, ch'è tanto dire, lo traslocamento delle stagioni, il ch'è certamente gran cosa, non era egli d'uopo il correggere i noviluni, a far che l'uso principale del ciclo, cioè dire, l'indicazione loro, si conservasse? Quindi segue, *mais l'intercalation grégorienne vint renverser cet arrangement qui était assez simple et assez exact pour les usages civils*. La correzione gregoriana, dica pur ciò che vuole il Delambre, rimediò a tutto, ed in perpetuo. I noviluni del nuovo calendario sono abbastanza esatti per l'uso civile, l'equinozio è renduto, e fissato ai 21 di marzo, e la luna pasquale vien computata come nei primi secoli della chiesa. In questo luogo mostra apertamente qual concetto egli abbia del calendario gregoriano, e quanto dovette rallegrarsi, allorchè fu in Francia, interamente soppresso. Ma quanto al desiderio di lui, che si fosse continuato l'uso del calendario giuliano, oltre che egli è incompatibile colle regole della chiesa, relative al tempo della celebrazion della pasqua, dico di parermi, che sarebbe stato oltremodo incomodo, d'aver le stagioni girovaghe in senso retrogrado, pei vari giorni dell'anno. Se non che, rileva altrove egli stesso, come uno fra i vari vantaggi del calendario francese repubblicano, che il principio in ogni mese corrisponda a un di presso coll'entrata del sole pei diversi segni dello zodiaco, e ancora rileva come co'nomi dei mesi di quello si distinguevan ben le stagioni, mentre qui pel contrario, stante il calendario giuliano, non si contano.

Pag. 705. lin. 13. *Cette dernière fraction doit être un entier*. Non vi è dubbio, *et peut recevoir une valeur*

à volonté. Ma ciò è falso, mentre A dipende da B, B da C, e C da $-14(a-c)-(a-b)$ come si può vedere nel resto del calcolo.

Pag. 705. l. 13. *Soit*) tutti questi *soit* alterano a parer mio
l. 16. *Soit*) non poco l'ordine del discorso, e ar-
l. 17. *Soit*) restano per dir così la mente del let-
Pag. 706. l. 1. *Soit*) tore, e val meglio dopo avere osservato che la frazione in questione debb' essere un intero, il dire, ch' essa *soit* sia uguale ad A, B, C respettivamente per concluder poi

$$x = \frac{15A-(a-c)}{13}; \quad A = \frac{13B+(a-c)}{12};$$

$$B = 19C-14(a-c)-(a-b).$$

lin. 3. *Il faut donc que B soit un multiple de* 19 *plus grand que* $14(a-c)+(a-b)$. Sussiste ciò allora soltanto che si abbia negativa la quantità $-14(a-c)-(a-b)$, ma risultando questa positiva, come nel caso di $c>a$, e $b>a$ (e tale ancora può accader che sia nei casi di $c>a$, e $b<a$, ovvero di $c<a$, e $b>a$) l'asserto dell' autore non sussiste. Nei detti casi pertanto trovo che B debb' essere un multiplo di 19 minore della quantità di $14(a-c)+(a-b)$, dalla quale debb' esser sottratto, e il prossimo inferiore a lei, pari o disparo secondo che pari o disparo sia $(a-c)$.

Pag. 708. lin. pen. *Cet ordre serait suffisant et perpétuel, si le cycle de* 19 *ans donnait toutes les lunaisons intercalaires de* 30 *jours; mais nous avons vu* (47) *que la derniére intercalaire du cycle n' était que de* 29 *jours, au lieu de* 30; *la nouvelle lune avancera donc d' un jour, il faudra ajouter ce jour à toutes les épa-*

ctes. Pour éviter cette addition, on a fait trente lignes, ou suites d' épactes, où les épactes de la ligne supérieure sont toujours plus fortes d' une unité que celles de la ligne inférieure. L' autore prende equivoco, le trenta linee dell' epatte furono soltanto destinate da servire all' equazioni solare, e lunare: per l' addizione poi da lui mentovata si aggiugne 12 in vece di 11 nella formazion dell' epatte, quando s' incontri l' aureo numero 19.

Pag. 709. lin. 26. *L' équation qui dépend du nombre d' or arrive tous les* 19 *ans. Pour faire entrer cette dernière dans le calcul, d' une façon moins incommode, on a fait une table de* 19 *colonnes dont chacune porte en tête un de* 19 *nombres d' or.* I 19 numeri d' oro sono in capo alle 19 colonne per la stretta relazione che hanno coll' epatte; nella prima linea delle quali che ha *P* per indice (ch' è quella che serve pel calendario giuliano) l' epatta * corrisponde al numero d'oro tre, perchè tanto questo è notato al primo gennaro nell' antico calendario, quanto quella nel nuovo: il rimanente della tavola suddetta procede dallo stesso principio. È altresì noto che non si può calcolar l' epatta d' un anno senza che sia dato il numero d' oro. Insomma noi abbiamo una tavola spasa dell' epatte solo perchè il calendario abbisogna dell' equazione solare, e lunare, e questa è la vera idea della cosa.

lin. 32. *On a omis tout exprès les lettres qui pourraient faire équivoque; o qui pourrait être pris pour zéro, L qui vaut aussi* 50, *et I qui on aurait pû confondre avec le chiffre* 1. Si ommise inoltre la lettera *K* majuscola, perchè dalla minuscola poco differisce

Pag. 709. lin. 36. *La ligne P fut donnée au sixième siécle, c' est à dire qu' elle a servi depuis l' an* 500 *jusqu' à* 600 *; les épactes de cette ligne répondaient alors assez bien aux nouvelles lunes, ou plutôt les indiquaient environ* 16 *heures trop tard*. La linea *P* non potè servire dal 500 al 600, poichè l' invenzione dell' epatte si fece solo nel 1582. Ecco come dovea dirsi. L' epatte della linea *P*, la quale è notata nella tavola dell' equazione loro dal 320 al 799 mostrano i noviluni dal 500 al 600 sedici ore circa più tardi del giusto. E qui si noti che per lo computo della pasqua per gli anni prima della riforma, e pel calendario giuliano deesi impiegar sempre la linea *P*, come quella che corrisponde esattamente ai numeri d' oro dell' antico calendario. Chi credesse pertanto di doversi servire a ciò delle linee *a*, *b*, *c* negli anni 800, 1100, 1400, perchè notate nella tavola suddetta, errerebbe: possono per esse soltanto trovarsi i noviluni rettamente degli anni respettivi di quei secoli; e continuando dice egli;

lin. 38. *On ne voulait pas qu' elles s' accordassent mieux, de peur de se rencontrer, pour la célébration de la pâque, avec les juifs qui se réglent sur la lune vraie, ni avec certains hérétiques, nommés* quarto-decimans, *qui se réglaient sur le* 14 *de la lune vraie; ce qui aurait été* indecent, illicite, *et* sentant le manichéisme, *dit Clavius, dans son livre du calendrier, pag.* 59, *edition de Rome*, 1603, *ou Clavii opera, tom. V. pag.* 55. *On ne vouloit pas que la lune de pâque précédât la lune vraie*, ce qui serait absurde, *dit encore le même auteur, mais qu' elle la suivît*, ce qui est plus conforme *à l' usage de l' église*. Le principali e sode ragioni di non celebrar la pasqua nel-

si potrà consultare il Clavio al num. 3.° del cap. 1.°, ove si dichiara » ecclesiæ cur maluerit pascha mobile esse quam fixum. »

Pag. 712. lin. 9. ... 22 ..., 3. leggi ... 22 ... 2.

lin. 24. *On peut réduire ces deux remarques à une seule*. Ciò è falso. Vedi le due note alla pag. 647 lin. 20 del compendio.

lin. 25. *Si le calcul donne un nombre au dessus du 24 avril, retrenchez sept jours, ou une semaine*. Fallace del pari per la stessa ragione. Vedi le note testè citate.

lin. 28. *Mr. Gauss n' a point démontré ces formules*. Vedi la nota 10.ª al Gauss. *La démonstration se déduirait des principes que nous avons posés.* È dispiacevole di dover rimanere col desiderio di ammirarla.

Pag. 713. lin. 20. *Ces peu de lignes de Mr. Gauss remplacerait le gros volume de Clavius, si l' auteur y avait ajouté la manière de continuer la table des M, et des N qu'il n' a étendue que jusqu' à* 2499. Il Gauss dette però le formole di *M*, e di *N*, onde servirsene per un secolo qualunque, il che in questo luogo il Delambre non avvertì, bensì nella conoscenza de' tempi pel 1817. Sfortunatamente l' espressione del Gauss non potrà servire se non fino al 4199, come abbiamo largamente altrove dimostrato.

lin. 25. *Pâques est le dimanche qui suit la pleine-lune qui tombe le jour de l' équinoxe* (il 21 marzo) *ou le suit immédiatement*, e poco dopo. *Si la pleine-lune, au lieu de tomber le* 21, *tombe* 29 *jours plus tard, c' est-a-dire le* 50 *mars ou le* 19 *avril, pâques sera le* 19 *avril, si ce* 19 *est un dimanche*. La

contradizione qui è manifesta, e deriva, o dal non aver fatto la debita distinzione tra il plenilunio, e la XIV della luna pasquale (che non può cadere più là del 18 aprile), o dall'aver detto *si tombe* 29 *jours plus tard*, invece di 28, essendo la luna pasquale di 29 giorni, non mai di 30. A parlar giustamente si dee dir così „ se la luna XIV invece di cadere il 21, cade ai 20 di marzo fa d'uopo attendere la XIV d'aprile, la quale sarà ai 18 dello stesso mese, e cadendo in sabato, si farà pasqua il 19 aprile.

Pag. 715. . . . Nella tavola prima l'epatte 25, XXV sono scritte amendue in arabo, e distinte solo da un punto; nella medesima la seconda colonna che ha in testa 1500 *avant la refor.* è tutta sbagliata, ecco i numeri giusti. 8, 19, *, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 8, ed appartengono alla lettera indice *P*, che si adopera per gli anni prima della riforma, e nel calendario giuliano.

lin. ult. *Voyez pour la suite* Clavius, *p.* 134 *et suivantes; mais il remarque lui-même que cet arrangement n'est exact que jusqu'à l'an* 8100. *Plus loin, les épactes ne quadrent plus si bien avec les nouvelles lunes; mais pour corriger ce défaut, il eût fallu compliquer encore le calendrier; on lui a donc laissé volontairement cette imperfection*. Si giova il Delambre dell'autorità del Clavio a persuadere il pubblico, che nell'8100 l'epatte non indicheranno più rettamente i noviluni, senza però che ne porti la ragione, la quale nota che sia, vedremo com'ella aumenti, al parer mio, l'idea vantaggiosa già concepita del calendario gregoriano: ed ecco in breve come la cosa sta. Nella costruzion della tavola spasa dell'epatte, il Lilio non avvertì all'epat-

te XXV e XXIV, notate insieme in uno stesso giorno, ne' mesi di febraro, aprile ec., per cui allora che la posposizione della luna cagionata dall' eccesso dell' equazione solare sull' equazione lunare, sia di 29 giorni, avverrà che contati questi, discendendo a mano a mano dalla linea *C* majuscola inclusive, che servì pel 1700, e che ha l' epatta XXII corrispondente al num. d'oro 3, alla 28.ª e 29.ª posposizione si perverrà alle linee *F* ed *E* per l' 8100 ed 8200, e che hanno l' epatte XXV e XXIV rispondenti del pari al num. d' oro 3, le quali epatte essendo unite insieme ai 5 febraro impediranno nel calendario la dovuta posticipazione 29.ª del novilunio. In somma lasciando per la posposizione lunare la linea *F* coll' epatta XXV, e prendendo la linea *E* coll' epatta XXIV tutto che nella tavola si discenda, nel calendario ai 5 febraro, non si discende; e ciò produrrà un errore d' anticipazione d' un giorno ne' noviluni. Nell' 8200 avrà luogo siffatto inconveniente, al quale sarà incontanente rimediato, col far uso cioè della lettera indice *D* coll' epatta XXIII, in luogo di *E* coll' epatta XXIV: allora l' epatte darranno i noviluni giustamente, come pel tempo precedente fino all' anno 22199, nel quale nuovamente avverrà lo stesso difetto per la ragione medesima, e così via via si riprodurrà ad ogni 59 posposizioni lunari, per l' effetto delle quali si richiede un lasso di tempo di circa 14000 anni. L' autore espone la cosa in maniera, che non si possa comprendere d' onde nasca che dopo l' 8100 l' epatte non mostrin più rettamente i noviluni. Si giudicherebbe che un siffatto errore si fosse a poco a poco accumulato e renduto poi evidentissimo nell' anno 8100. Ma non è egli così; l' errore nascerà per così dire in un giorno, e correggerassi ancora in un giorno, sol che si adoperi la lettera indice *D* in-

vece di *E*, negli anni 8200, 22200, 36200, ec. Nè ciò diminuisce la generalità delle formole analitiche dell'epatta da noi dimostrate, le quali contenendo le quantità numeriche —4, 48, —3, 44 respettivamente, mutando queste in — 5,48 — 4,44 nell' 8200, eccole giuste. Si rende necessaria una consimil correzione, ogni volta che occorra, perchè esse danno nè più nè meno l'epatta secondo la tavola stesa del Lilio. Del rimanente la perpetuità del calendario fu già dimostrata dal Clavio, dal Petavio, dal Riccioli, e da altri, ancorchè si trovasse nel tempo avvenire, che i moti medi del sole, e della luna non corrispondessero a quelli, che furono adottati dai riformatori, e che perciò dopo molti secoli gli equinozi, e i noviluni fossero rimossi dal luogo, fin dal 1582, loro destinato, e fu ancora suggerito dai medesimi autori il modo di rimediarvi, senza punto variare la forma del calendario. Adunque se anche in quest' ultimo caso non si altera nella menoma parte il calendario perpetuo, ne siegue che l' errore accennato nella tavola spasa dell' epatte, tanto meno debba aver forza di renderlo variabile.

Pag. 716. lin. 30. *En commençant par* 3, correggi » principiando per 23. »

lin. 36. *La troisième donne l' épacte du mois qui est à chaque jour à côté de la lettre. Cette épacte indique le 14.^e de la lune*. Se ciò fosse, la chiesa celebrerebbe più e più volte la pasqua nella XIV della luna cogli eretici; quando l' autore voglia compiacersi di considerar meglio la cosa, s' accorgerà che l' epatte della terza colonna appartengono tutte al XV della luna pasquale.

Pag. 717. . . . Nella tavola seconda non si distingue affatto l'epatta XXV dall'epatta 25, per cui se con quest' ultima s' incontra la lettera domenicale *C*, la tavola darà i 25 aprile, ma la pasqua sarà ai 18. L'autore ha corretto questa mancanza nella conoscenza dei tempi pel 1817.

lin. 35. $7n - 2247$ leggi $7n - 2257$.

Note ad uno scritto del Delambre inserito nella *Connaissance de tems pour l' an* 1817. *Paris Courcier* 1815 *in* 8.° *vol.* 1.

Pag. 307. lin. 28. *Le nombre d'or* $= N = \left(\frac{A+1}{19}\right)_r$. È d' uopo aggiugnere, che quando il residuo sia zero, si prenda invece 19.

lin. 33. $\varepsilon = \left(\frac{11N-10}{30}\right)_r$ questo termine generale dell' epatta pel 1583 al 1699, facilmente si cava dalla formola dell' epatta del calendario giuliano, pag. 16, poichè facendo ad essa la correzione -7, come è detto alla pag. 54, si ha subito l' espressione di ε. Lo stesso si ottiene per mezzo della tavola spasa dell' epatte: imperciocchè, si determini prima il numero d' oro di un anno compreso nello stesso intervallo di tempo; nel 1600 per esempio si ha $N = 5$. Nella tavola suddetta nella linea che ha la lettera indice D che serve dalla riforma al 1699 corrisponde all' aureo numero 5 l' epatta 15, allora sottraendo nel numeratore da 11 N l' incognita x, avremo $\left(\frac{11 \cdot 5 - x}{30}\right)_r = \left(\frac{55-x}{30}\right)_r = 15$; $25 - x = 15$, $x = 10$. Vedi inoltre quanto si è detto al cap. IV delle formole analitiche.

Pag. 308. lin. 19. *Ou un nombre plus fort*. Sia, ma minore di 17.

lin. 24. *Et que le quotient sera au moins* 25. Il quoziente sarà tra i limiti 17, e 25.

lin. 28. *Mais Clavius nous avertit lui même que vers l' an* 8100, *les épactes commenceront à*

ne plus si bien indiquer les nouvelles lunes. Vedi la nota al luogo della pag. 715. lin. 28. dell'astr. teor. prat.

lin. pen. *L'épacte ainsi trouvée, j'ai remarqué à l'inspection de ma table II, que l'épacte de l'année, et le quantième de mars au quel pâques peut arriver le plus tôt forment toujours une somme de* 45. Osservando però la detta tavola seconda, si rileva che dall'epatta 23 all'epatta * la somma è 45, quindi 75, eccettuando l'epatta 24, e l'epatta 25 punteggiata (che l'autore ommise di notare a sinistra dell'epatta 26) per le quali la somma è di 74, ma a tutto questo egli rimedia facendo all'occasione ε negativa, o prendendo 75 invece di 45, e aggiugnendo le solite due eccezioni alla formola sua.

Pag. 309. lin. 11. *Il nous reste à trouver* λ; *or on voit encore par ma table II, que* $\lambda = 4 + 23 - \varepsilon$. Ancora qui osservando la tavola suddetta, si trova che da $\varepsilon = 9$ ad $\varepsilon =$ * l'equazione è giusta, quindi è falsa, l'autore vi rimedia del pari, o coll'ε negativo, o impiegando 57 in luogo di 27.

Pag. 309. lin. 29. *Cette lettre D, dans le calendrier perpétuel, se trouve, avec l'épacte* 24, *répondre au* 5 *avril; c'est la nouvelle lune*... In fin qui corre bene, e d'onde si cava che ai 5 aprile, nel caso presupposto, risponde il primo giorno della luna, siegue poi. *Le* 14.e *jour de la lune sera le* 19 *qui est aussi un dimanche, puisqu'il est marqué de la lettre D. Ainsi pâque doit être le* 19. E qui dov'è male, perchè la XIV della luna cade nel 18 aprile, errore altra volta corretto da noi, e da evitarsi tanto più che per esso si crederebbe, che la celebrazion della pasqua potesse avve-

nire nella XIV della luna, insiem coi quartodecimani, il ch'è vietato.

Pag. 310. lin. 5. *La seconde* (eccezione) *même y est plus incommode*. Io ho dimostrato altrove che la seconda eccezione del Gauss dipende del pari da $a > 10$ o da $N > 11$, che torna lo stesso.

Pag. 311. lin. 17. *Ce cas n'est pas celui de la première exception*, dee dire questo caso non spetta alla seconda eccezione.

Pag. 312. lin. 13. *Ici point de correction, aucune de trois conditions n'a lieu*. Avvertimento superfluo, mentre da ciò ch'è detto, l'eccezione non può cadere sulla pasqua dei 18 aprile dal calcolo ottenuta.

lin. 19. 25, leggi 5.

Pag. 313. lin. 7. $19A$, leggi $19a$.

lin. 28. *Il pourroit faire soupçonner que la correction* — *7 sera nécessaire; mais on ne connaît ni ε, ni L qui décideraient la question*. Io non so se il Gauss abbia voluto esprimere la seconda eccezione, in una maniera analoga con cui espresse la prima, per una certa eleganza analitica, ch'egli ama soprammodo. Certa cosa è che nella formola di lui la seconda eccezione ha luogo ogni volta che il calcolo dia il 25 aprile, ed $N > 11$, od $a > 10$ ch'è lo stesso, e mal si appone il Delambre, credendo che abbisogni per iscoprirla i valori di ε, e di L.

Pag. 314. lin. 13. 50.^{e} *multiple*, dee dire 25.^{e} *multiple*, poichè avendosi dalla tavola, $19 . 25 = 475$, si avrà ancora, aggiugnendo uno zero, $19 . 250 = 4750$.

lin. 14. *Si l'on avait* $A + 1 = 4199$, *le reste serait* 49, ma cosa ha a far qui il resto 49 colla tavola dei multipli di 19? È chiaro che il 220.°

lin. 9. $\lambda = \left(\frac{M-18}{7}\right)_r$ poichè sostituendosi nel numeratore di $\left(\frac{27-\epsilon}{7}\right)_r = \lambda$ il valore di $\epsilon = 45 - M$ si avrà $\lambda = \left(\frac{27-\epsilon}{7}\right)_r = \left(\frac{27-45+M}{7}\right)_r = \left(\frac{M-18}{7}\right)_r$ ch' è ciò che si voleva.

lin. 10. *Si λ était négatif on ajouterait* $+7$. ma come mai λ ha da poter divenir negativo dovendo esser $M > 21$?

lin. 22. *Pour le calendrier grégorien voulez vous une expression exacte de l'épacte, faites* $F =$ *ec*. Benchè troppo tardi, l' autore finalmente ci dà la formola dell' epatta giusta, e indipendente dalla tavola 3.ª sempre però troppo complicata, e inferiore di gran lunga alle formole per noi dimostrate.

Chiuderemo pertanto queste poche osservazioni con dire che noi giudichiamo le formole del Delambre pel calcolo della pasqua poco utili, essendo che quelle della lettera domenicale, e dell' epatta sono troppo complicate, e le altre dimandano qualche attenzione nel calcolarle, pel cambiamento de' segni cui le quantità ε, λ vanno soggette.

APPENDICE

NELLA QUALE SI RAGIONA

DELLE FESTE MOBILI, DELL'EPATTA,

E DI VARI CICLI

DI LODOVICO CICCOLINI.

APPENDICE

§. I.

Delle feste mobili.

Calcolata la festa della pasqua per un anno qualunque, pel medesimo si trovano facilmente le altre feste mobili, le quali sono, ed accadono come appresso.

Settuagesima . .	63 giorni	prima di pasqua
Ceneri	46 . . .	prima di pasqua
Rogazioni . . .	36 giorni.	dopo pasqua
Ascensione. . .	39 . . .	dopo pasqua
Pentecoste. . .	49 . . .	dopo pasqua
SS. Trinità. . .	56 . . .	dopo pasqua
Corpus Domini .	60 . . .	dopo pasqua

con questo però che negli anni bisestili alla domenica di settuagesima, ed al mercoledì delle ceneri, deesi aggiugnere un giorno; per forma che riducendo a giorni dell' anno comune il dì di pasqua P, si avrà

Settuagesima $= P - 63$
Ceneri . . . $= P - 46$
Rogazioni. . $= P + 36$
Ascensione . $= P + 39$
Pentecoste . $= P + 49$
SS. Trinità . $= P + 56$
Corpus Domini $= P + 60$.

A facilitare il brevissimo calcolo alle feste mobili spettante, soggiungo qui la corrispondenza dei giorni dell'

anno cogli ultimi giorni dèi 12 mesi di un anno comune cioè dal 1 gennaro ai

31 G. 28 F. 31 M. 30 A. 31 M 30 G. 31 L. 31 A. 30 S. 31 O. 30 N. 31 D

inclusive, e ragguagliatamente corrono giorni

31 . 59 . 90 . 120 . 151 . 181 . 212 . 243 . 273 . 304 . 334 . 365

Esempio per lo anno 1818 prossimo venturo, nel quale cadrà la pasqua ai 22 di marzo. Si dirà pertanto 22 marzo $= 59 + 22 = 81 = P$, dunque sostituendo il valore di P si avrà

Settuag. $= 81 - 63 = 28$ gen.
Ceneri. $= 81 - 46 = 35$; $35 - 31 = 4$ febr.
Rogaz. $= 81 + 36 = 117$; $117 - 90 = 27$ apr.
Ascens. $= 81 + 39 = 120$; $120 - 90 = 30$ apr.
Pentec. $= 81 + 49 = 130$; $130 - 120 = 10$ mag.
SS. Trin. $= 81 + 56 = 137$; $137 - 120 = 17$ mag.
Cor. Dom. $= 81 + 60 = 141$; $141 - 120 = 21$ mag.

Negli anni bisestili al 29 febr. corrispondono 60 giorni, però nel calcolo delle ceneri, bisognando, s'impiegherà nella sottrazione 60 invece di 59, come accade nel seguente esempio per l'anno bisestile 1876, nel quale si celebrerà la pasqua ai 16 aprile, e perciò sarà
$P = 90 + 16 = 106$, onde

Settuag. $= 106 - 63 + 1 = 44$; $44 - 31 = 13$ febr.
Ceneri. $= 106 - 46 + 1 = 61$; $61 - 60 = 1$ marz.

Notisi che in quest'esempio nel computo delle ceneri avrebbe potuto considerarsi l'anno 1876 come comune, ed ommettersi l'equazione $+ 1$, essendo che tanto vale il primo marzo la quantità $106 - 46 = 60$ appartenente ad un anno comune, quanto $106 - 46 + 1 = 61$ ad un bisestile.

L'anno bisestile 2096 cadrà la pasqua ai 15 d'aprile, e però $P = 105$, e conseguentemente

Settuag. $= 105 - 63 + 1 = 43$; $43 - 31 = 12$ febr.

Ceneri $= 105 - 46 + 1 = 60$; $60 - 31 = 29$ febr.

Le feste mobili dopo pasqua non soffrendo l'eccezione del bisestile, si computano sempre nella maniera sopra esposta, per lo stesso motivo, che la medesima eccezzione può esser lasciata nel computo delle ceneri, se cadano in marzo, senza errore, siccome è detto poco fa.

Trà le feste mobili si conta ancora la prima domenica dell'avvento, la quale cade 4 domeniche innanzi Natale, e conseguentemente cade nella domenica più vicina alla festa di S. Andrea Apostolo, e ove la lettera domenicale sia una delle seguenti *B*, *C*, *D*, *E* corrisponde ai 27, 28, 29, 30 Novembre: ove sia *F*, *G*, *A*, corrisponde all'1, 2, 3 Dicembre, respettivamente.

Sarà sempre facile di determinare l'avvento di un anno *H*. Imperciocchè dal Calcolo della Pasqua dello stesso anno *H* si ha sempre nota la lettera sua domenicale; e facilmente si trovan le lettere notate nel calendario perpetuo dai 27 Novembre al 3 dicembre inclusive. Altro perciò non è da fare che questo, che cioè ridurre a giorni dell'anno comune uno qualunque dei compresi trà il 26 novembre, e il 3 dicembre, e divisi per 7, il residuo dà la lettera cercata, la quale paragonata colla lettera domenicale dell'anno *H*, mostra immantinente il giorno dell'avvento. Così pel 4514 la lettera domenicale è *G*, ma il 27 novembre $= 31$ ottobre $+ 27 = 304 + 27 = 331$, e $(\frac{331}{7})r = 2 = B$, e poichè da *B* a *G* sono 5 giorni, ai 27 nov. $+ 5 = 32$ nov. $= 1.°$ dic. sarà l'avvento.

È d'uopo inoltre a quei che fanno l'ordinario per la recita dell'ufficio divino il sapere il numero delle do-

meniche intercette tra la Pentecoste e l' avvento, e questo si trova aggiugnendo 24 al numero delle domeniche che avranno luogo dopo quella di Pasqua fino ai 25 aprile, giorno in cui si celebra la festa di S. Giorgio. Così se incontrisi la Pasqua ai 25 di marzo vi sono quattro domeniche fino alla Festa di S. Giorgio inclusive, la quale cade allora anche essa in giorno di domenica, saranno adunque 28 le domeniche tra la Pentecoste e l' avvento. Similmente essendo stata in quest' anno 1817 la pasqua ai 6 d' aprile, e dal 6 al 23 aprile essendovi state in mezzo due domeniche, le domeniche tra la Pentecoste e l' avvento verranno ad essere 26. Che se la pasqua si faccia lo stesso dì di S. Giorgio, le domeniche saranno 24, e solamente 23 se avvenga la pasqua dopo quel giorno.

La lettera del martirologio serve per tutto l' anno ad indicare ogni mattina il dì della luna del giorno appresso, secondo il calendario, nella lezione che di esso martirologio si fa in coro a prima avanti il versetto *pretiosa*. La medesima si ottiene facilmente dall' epatta annuale: imperocchè l' epatte corrispondono ordinatamente alle lettere del martirologio in guisa, che dall' epatta I all' epatta XIX si adoprano le lettere minuscole da *a* fino ad *u*, esclusa la lettera *o* per la simiglianza che ha collo zero, e dall' epatta XX all' epatta * s' impiegano le majuscole da *A* fino a *P*, non ammesse le lettere *I*, *K*, *L*, *O*, perchè la seconda majuscola si confonderebbe facilmente colla minuscola, e le altre tre co' numeri romani uno, cinquanta, e zero: per maggior chiarezza eccone la tavola

i.ii.iii.iv.v.vi.vii.viii.ix.x.xi.xii.xiii.xiv.xv.xvi.xvii.xviii
a. b. c. d. e. f. g. h. i. k. l. m. n. p. q. r. s. t

xix.xx.xxi.xxii.xxiii.xxiv.xxv.25.xxvi.xxvii.xxviii.xxix.*
u. A. B. C. D. E. F. *F*. G. H. M. N. P

Quando l' epatta annuale sia 25 di diverso carattere come nel 1954, allora nel martirologio si adopera la lettera *F* di diverso colore.

§. II.

Di alcuni altri usi dell' epatte volgarmente praticati.

L' uso dell' epatta non solo si limita alla determinazione della pasqua, ed all' investigazione della lettera del martirologio, ma si estende ancora, benchè molto alla grossa, a trovare a memoria l' età della luna, il suo luogo nello zodiaco, e quanto tempo di notte la luna risplenda.

Ad ottener le quali cose si rende dapprima necessario di esporre un metodo, onde conoscere, data un'epatta qualunque, a quali giorni nelli 12 mesi dell' anno, essa corrisponda.

Ora osservando la disposizione dell' epatte nel calendario si trova, che al primo giorno di ogni mese corrispondono le seguenti

1 G.	1 F.	1 M.	1 A.	1 M.	1 G.	1 L.	1 A.	1 S.	1 O.	1 N.	1 D
*.	XXIX.	*	XXIX.	XXVIII.	XXVII.	XXVI.	XXIV.	XXIII.	XXII.	XXI.	XX

Disposizione assai facile da imparare. Convien por mente inoltre che ai 5 febraro, ai 5 aprile, ai 3 giugno, al 1.° agosto, ai 29 settembre, ed ai 27 novembre, l' epatte XXV e XXIV, sono notate insieme, e premesso ciò agevol cosa è a determinare a quai giorni dei mesi dell' anno corrisponda un' epatta qualunque; bastando ch' altri conti quanti giorni sien dall' epatta data inclusive all' epatta del primo di ogni mese. Così per esempio sia IX l' epatta data, si dirà quanto a gennaro, e marzo da IX a *, ossia da IX a XXX sono 22 giorni, dunque li 22 di gennaro, ed i 22 di marzo ha l' epatta IX. Similmente per febraro, ed aprile si dirà da IX inclusive a XXIX, sono 21 giorni, ma per avervi

notate insieme tra l'intervallo loro l'epatte XXV e XXIV si contano 20 giorni soltanto, dunque ai 20 di febraro, ed ai 20 d'aprile corrisponde l'epatta IX; si dirà del pari per maggio dall' epatta IX all'epatta XXVIII, sono 20 giorni, dunque ai 20 di maggio stà l'epatta IX, e così via via.

Allora quando l'epatta data è maggiore di XX, per far questo computo si aggiunga 30 se occorra all' epatta del 1.° del mese. Sia per esempio data l'epatta XXVII, e si cerchi a qual giorno del mese d'agosto essa risponda, è chiaro che non potrà dirsi da XXVII a XXIV, ma bensì da XXVII a 30 + XXIV, sono 28 giorni, dunque ai 28 d'agosto è notata l'epatta XXVII.

Per via di un tal mezzo abbiamo come poter fissare i noviluni di qualsisia anno, e conseguentemente l'età della luna per qualunque giorno di qualsivoglia mese. Cerco per esempio l'età della luna oggi 28 aprile 1817, l'epatta è XII, da XII a XXIX sono 18 giorni, ma per le unite epatte XXV e XXIV, prendo 17, vale a dire che al 17 aprile è il novilunio, dal 17 al 28 sono 12 giorni che è l'età della luna secondo il calendario. Ancora cerco l'età della luna pei 10 gennaro coll' epatta XII; da XII a XXX sono 19 giorni, dunque ai 19 cade il primo giorno della luna nuova seguente, dai 10 esclusive a 18 ultimo giorno della luna sono 8 giorni, dunque ai 10 gennaro l'età della luna è di giorni 22.

Pel mese di gennaro, se l'epatta corrispondente al giorno dato è maggiore dell' epatta annuale si è costretto per trovare l'età della luna di far uso del novilunio seguente, come nell' ultimo esempio. In tutti gli altri mesi però si dee impiegare il novilunio che precede il giorno dato. Così se si dimanda l'età della luna pel

1.° febrajo coll'epatta XII, il novilunio che precede cade ai 19 di gennaro, il seguente ai 17 febraro. Ora è più presto trovata l'età della luna prendendo il numero dei giorni dal 19 inclusive di gennaro al 1.° febraro, di quello sia di dover paragonare il 1.° al 17 febraro, e indi sottrarre 16 da 30.

A farsi al vero più da vicino, alla età della luna così trovata si aggiugne sempre un giorno, perchè la congiunzione della luna col sole per lo più succede in cielo di un giorno più presto dell' indicata dall' epatta nel calendario, e perciò quando con un' epatta qualunque troviamo l'età della luna di 14 giorni, con ragione diremo ch'è di 15 in cielo, e dando l' epatta XII, il novilunio ai 19 gennaro, ai 17 febraro ec. diremo invece il novilunio accascare, od essere accascato li 18 gennaro, li 16 febraro ec., poichè ai 19 gennaro, ai 17 febraro ec. corrisponde in cielo, essendo l' epatta XII il secondo giorno della luna.

Quanto si è detto ha poi somministrato la regola comunemente seguita per trovare l'età della luna, la quale consiste nell' aggiugnere all' epatta annuale il giorno del mese dato, più tante unità quanti sono i mesi passati da aprile in là. Pei mesi di gennajo, e marzo non si aggiugne niente, e pel mese di febrajo si aggiugne uno. Così ai 28 aprile 1817 che ha XII d' epatta sarà l' età della luna $= 12 + 28 + 1 = 41 = 11$ sottraendosi 30 sempre, quando si possa. Noi però abbiamo ottenuto poco sopra per lo stesso caso l' età della luna di 12, la quale è secondo il calendario. La differenza di un giorno deriva da questa regola istessa, la quale nei mesi di febrajo, aprile, giugno, agosto, ottobre, dicembre falla di un giorno in meno subito dopo i giorni corrispon-

denti all' epatta dell' anno adoperata, fino alla fine dei mesi suddetti. Così essendo pel 1817 l' epatta XII, la quale corrisponde ai 17 febraro, 17 aprile, 15 giugno, 15 luglio, 13 agosto, 11 ottobre, e 9 dicembre, ne segue che dai 18 febraro, 18 aprile, 16 giugno, 16 luglio, 14 agosto, 12 ottobre, 10 dicembre fino alla fine delli stessi mesi si ha dalla regola l' errore in meno di un giorno; ha luogo inoltre l' istesso errore in tutto il mese di settembre, ed in tutto il mese di novembre, tanto che per ottenere l' età della luna più prossima al vero, in tali casi converrà aggiugnere due giorni, invece di uno, come si era da noi precedentemente stabilito.

Il luogo della luna nello zodiaco si ottiene multiplicando per 12 l' età della luna avuta, aumentata dell'unità, e il prodotto darà il numero de' gradi, del qual numero la luna è distante dal sole; aggiugnendo poi il prodotto ottenuto al luogo del sole nello zodiaco dello stesso giorno, si avrà quello cercato della luna. Il luogo del sole è poco più, poco meno sempre noto, basta di aggiugnere a 280 gradi il numero dei giorni dell' anno fino al giorno dato. Così il 28 aprile 1817, l' età della luna corretta essendo 13 si avrà $12.13 + 280 + 118 = 554 = 554 - 360 = 194^{\circ} =$ sei segni e 14°. Il 14 ottobre 1816 che ha per epatta uno l' età della luna corretta sarà di 23 giorni, dunque $12.23 + 280 + 287 = 843 = 843 - 2.360 = 123^{\circ} =$ quattro segni e 3°.

A determinare da ultimo la durata a un dipresso del chiaror della luna in tempo di notte di un dato giorno: si cerchi prima l' età della luna, e chiamata l la lunghezza della notte del dato giorno, ed e l' età della luna corretta, si avrà la durata che si dimanda, se ab-

riforma del calendario, e intanto si sostituirono quelle a questi, inquantochè si avvidero i riformatori che il metodo di trovare i noviluni col numero d' oro induce in errore. Indicando poi il numero d' oro l' anno del ciclo lunare cui appartiene, si determina per esso nell' antico calendario gli anni lunari di 13 mesi od embolismici, i quali anni lunari avean luogo sempre che s' incontrasse per aureo numero uno dei seguenti 5, 8, 11, 13, 16, 19, 2: nel calendario nuovo mostrano gli anni embolismici l' epatte XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, 25 XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX. Vedi Clavio cap. XVII. ☧. 12. L' epatta XVIII solamente quando concorra coll' aureo numero 19 dà l' anno embolismico.

Il ciclo dell' indizione romana è composto di 15 anni, e avvegnachè non abbia esso relazione alcuna col calendario, tuttavia non lascia di essere utile alla verificazione delle date che hanno le carte, i diplomi, e le pergamene dei secoli andati, la qual cosa altresì si fa maravigliosamente cogli altri cicli ancora. Concorre esso inoltre alla formazione del periodo giuliano. Reca non poca maraviglia perciò che da alcuni scrittori moderni sia giudicato affatto inutile, l' averne contezza.

Il gran ciclo pasquale comprende un giro di 532 anni, ed ha nome così per questo, che serve nel calendario ecclesiastico giuliano a determinare la pasqua, la quale dopo 532 anni riede al medesimo giorno del mese, in cui era stata celebrata 532 anni prima. Si valeano alcune volte gli antichi di questo ciclo nelle loro date colla denominazione di *annus magnus*, ovvero di *circulus magnus*. Il primo anno di Cristo corrisponde all' anno secondo di questo ciclo, all' anno primo del quale spettano il numero del ciclo solare 9, e l' aureo numero uno.

Sarebbe stato più conveniente per avventura di riferire la radice di questo ciclo all' anno 457 avanti l' era cristiana, nel quale si contò uno, e di ciclo solare, e di ciclo lunare, ma al fatto non è rimedio, e uopo è di mantenerlo come è, affinchè si renda utile all' interpetrazione delle date delle antiche scritture. Parve a noi conveniente di trattarne, affinchè il lettore venisse ad evitare gli equivoci che facilmente si prendon leggendo le cose mandate al publico da' moderni autori intorno a tale subbietto, tanto più che al celebre Petavio non sembrò inutile, ma anzi necessario al cronologo l' averne notizia, *ejus notitia chronologo necessaria est*, dic' egli al libro VII. cap. 6. de doctr. temp.

Il periodo giuliano fu da Giuseppe Scaligero cavato dai Greci, ed applicato all' anno Romano, ed al computo della pasqua de' Latini: e oltrechè avviene per esso di fare agevolmente la supputazione de' tempi, può ad esso ridursi non meno tutte le altre epoche impiegate nella cronologia. Egli è composto di 7980 anni ch' è il prodotto dei 3 cicli solare, lunare, indizione Romana 28. 19. 15 multiplicati tra loro, e nell' intervallo di tempo della sua rivoluzione, non s' incontrano insieme, se non una volta sola, gli stessi tre numeri dei tre cicli che il formano, comunque combinati; di maniera che un' anno qualunque spettante a questo periodo, oltre esser per se stesso distinto dalla quantità numerica che lo rappresenta, lo è ancora dai numeri dei tre cicli che gli appartengono, e da questi potrebbe esser determinato analiticamente, come or' ora vedrassi, se noto non fosse, e confermato o corretto se fosse dubbioso. Il Petavio al libro VII cap. 7, 8, 9 de doct. temp. parla diffusamente dell' uso, e de' vantaggi di un così fatto pe-

riodo, e tanti sono eglino, e tali che reca non poca maraviglia di leggere nel compendio d'astronomia del Sig. Delambre alla pag. 648, l'espressione già da noi altrove riferita „ questo periodo cessò d'esser utile fatta la riformazion gregoriana „ *cette période n' à plus aucune utilité depuis la réformation grégorienne*.

Nello spiegare i suddetti cicli, e nell'accennare i diversi usi loro, ommettendo le tante quistioni che su di essi s'incontrano, abbiam seguito l'opinione de' più accreditati autori, e particolarmente de' dotti padri Maurini d'Antine, don Clement ec., i quali si rendettero tanto benemeriti delle lettere coll'opera celebratissima da loro composta, e pubblicata dell'*art de verifiér les dates*.

A quanto è fin qui detto giudichiamo di presente utile l'aggiugnere in poche parole le cose seguenti sulla stessa materia.

Evvi un'altro ciclo lunare, del quale si servirono gli antichi Romani, che ha il suo principio tre anni dopo del cielo dello stesso nome, di cui abbiamo poco sopra parlato, e nel resto è simile a lui, e serve alla interpetrazione delle antiche date, in alcuna delle quali si trovano espressi amendue i cicli suddetti (*a*). In questo invece del numero d'oro 2 fu il numero d'oro 18 che corrispose all'anno primo di G. C., e però chiamando H un'anno qualunque dell'era cristiana può il num. d'oro di esso esser espresso generalmente da $\left(\frac{H+17}{19}\right)_r$.

All'interpetrazione delle date di antiche scritture possono servire ancora l'epatte, le quali del pari vi si trovano aggiunte, come si rileva, ad esempio, da una carta

---

(*a*) Vedi *l' art de verifier les dates* pag. XXI ediz. 1770 vol. 1. in fol.

antica del 821 dell' era nostra (*a*). Ma quest' epatte non corrispondono affatto in quantità numerica a quelle del cal. giul., delle quali trattammo alla pag. 16, che per queste all' anno primo di Cristo trovasi l'epatta XI, laddove nel cal. giul. si ha l'epatta XIX. E qui osservisi alla sfuggita come si distinguan tre sorta d'epatte, 1.° queste di cui ora parliamo, e delle quali la formola generale per un anno H, chiamando al solito N il numero d'oro, si è $\left(\frac{11(N-1)}{30}\right)_r$: 2.° quelle del cal. giul. le quali altro non sono a dir vero, che diciannove epatte del cal. greg. prese da quei giorni dell'anno, ne' quali erano notati i numeri d'oro dell'antico calendario, che serviva al tempo del Concilio Niceno. È da osservarsi nondimeno, che l'epatte del cal. giul. in dodici luoghi discordano co' luoghi dei detti numeri d'oro, e mostranvi perciò i noviluni un giorno più presto del giusto, i quali luoghi sono notati dal Clavio alla pag. 343 ediz. di Magonza: s' accordano però le dette epatte ne' noviluni di pasqua, ch' è il punto principale, perciò che siamo assicurati di non allontanarci punto dal vero nel computar la pasqua, e le altre feste mobili dell' antico calendario; 3.° finalmente le appartenenti al cal. greg. controssegnate a tutti i giorni dell'anno, e da Luigi Lilio inventate circa 235 anni sono, le sole, può dirsi, che siano in oggi comunemente conosciute.

Di altri cicli, e numeri periodici rimarrebbe a dire, la notizia de' quali non lascia di esser vantaggiosa; ma per amor di brevità, noi pregheremo il lettore di valersi per ciò dell' opera sopra citata di don Clement, e passeremo a dare le formole de' primi cinque cicli spiegati in questo paragrafo, che non abbiam date.

(*a*) Vedi alla pag. XXXI dell' opera suddetta.

§. IV.

Formole de' detti cicli.

Aggiugnerò adesso le formole onde trovare per un anno qualunque i numeri dei cicli solare, lunare, e dell' indizione romana, non che gli anni del gran ciclo pasquale (nominato universalmente periodo dionisiano, o vittoriano), e del periodo giuliano.

Chiamando pertanto H un anno qualunque dell' era nostra si avranno le cinque formole seguenti.

$\left(\frac{H+9}{28}\right)_r = a$ ch' è il num. del ciclo solare dell' anno H.

$\left(\frac{H+1}{19}\right)_r = b$ numero del ciclo lunare.

$\left(\frac{H+3}{15}\right)_r = c$ numero dell' indizione romana.

$\left(\frac{H+1}{532}\right) = H'$ anno del gran ciclo pasquale.

$\left(\frac{H+4713}{7980}\right)_r = H''$ anno del periodo giuliano.

nelle quali i numeri 9, 1, 3, 1, 4713 aggiunti ad H nel numeratore appartengono all' anno zero, ossia all' anno prossimo antecedente dell' era cristiana, come apparisce dalle stesse formole facendo in esse $H=0$. Se sia $H=1$ si avranno del pari i numeri 10, 2, 4, 2, 4714 per lo anno primo.

Si ottengono le prime tre formole per mezzo dei numeri de' cicli loro respettivi di un' anno qualunque, del quale si abbia l' effemeridi, o l' almanacco dove sogliono esser notati. Per esempio pel 1476 si ebbe, secondo l' effemeridi di Regio-montano di ciclo solare 1, di ciclo lunare 14, d' indizione romana 9: facendo pertanto

$$\left(\frac{1476+x}{28}\right)_r = 5, \left(\frac{1476+x'}{19}\right)_r = 14, \left(\frac{1476+x''}{15}\right)_r = 9$$

e determinando le tre costanti x, x', x''; sostituendo poi, ed H a 1476, e i valori ottenuti delle tre costanti, ed a, b, c ad 1, 9, 4 si avranno le dette tre prime formole. Si determinano x, x', x'' sottraendo dai loro numeratori, respettivamente, 1456 multiplo di 28, 1463 multiplo di 19, e 1470 multiplo di 15, allora sarà, pel cap. I, $\left(\frac{20+x}{28}\right)_r = \left(\frac{20+x-28}{28}\right)_r = 1$ ed $x=9$, $\left(\frac{13+x'}{19}\right)_r = 14$ ed $x'=1$, $\left(\frac{6+x''}{15}\right)_r = 9$, ed $x''=3$, dunque $x=9$, $x'=1$, $x''=3$, e fatte le sostituzioni si avrà $\left(\frac{H+9}{28}\right)_r = a$, $\left(\frac{H+1}{19}\right)_r = b$

$\left(\frac{H+3}{15}\right)_r = c$ come sopra. Può del pari trovarsi la formola quinta se sappiasi l'anno del periodo giuliano di un anno H dell'era cristiana. Abbiamo per esempio dall'effemeridi di Berlino che nel 1811 correva l'anno giuliano 6524. Facendo adunque $\left(\frac{1811+y}{7980}\right)_r = 6524$ risulterà $y=4713$, e sostituendo avremo come sopra

$$\left(\frac{H+4713}{7980}\right)_r = H''.$$

Indarno si cercherebbe la quarta formola con un siffatto metodo, mentre non si trova mai notato l'anno del gran ciclo pasquale nè nell'effemeridi, nè in altre opere comuni di tal sorta, ma soltanto nelle date di scritture antiche. Convien dunque supplirvi col ricordarsi, che Dionisio il piccolo che ne fu il promotore, stabilì che l'anno primo di detto ciclo precedesse di un anno l'era

nostra. A tal che l'anno primo di Cristo corrispondesse all'anno secondo del gran ciclo pasquale, ed egli preferì questo modo di noverare ad ogni altro, affinchè il numero uno del ciclo lunare ossia il numero d'oro uno, s'incontrasse coll'anno primo del gran ciclo pasquale.

Per mezzo de' numeri *a*, *b*, *c* dei tre primi cicli di un anno qualunque *H* può ancora determinarsi l'anno del periodo giuliano di esso, indipendentemente da quanto si è detto. Egli è un problema di analisi indeterminata. Onde risolverlo giova di aver presente:

I. Che multiplicando 28 per 19 ossia il ciclo solare pel lunare, il prodotto 532 forma il periodo di 532 anni detto vittoriano, la proprietà del quale è, che due numeri qualunque dei due cicli si combinino insieme in un anno medesimo, essi non possono ritornare insieme se non dopo 532 anni: e come nel ciclo lunare l'aureo numero uno appartenente al primo anno non ritorna che dopo compiuti 19 anni entrando il 20.°, ed il numero uno del ciclo solare dopo terminati anni 28, così nel periodo vittoriano dato l'anno il quale abbia uno tanto di ciclo solare, che di lunare, non se ne incontrerà un altro che abbia del pari uno pei due cicli se non dopo 532 anni: come ex. gr. nell'anno primo dell'era cristiana si ebbe 2 di ciclo lunare, e 10 di ciclo solare, e nessuno dei 531 anni seguenti venne notato cogli stessi cicli 2, 10, i quali però ebbero luogo nuovamente entrando l'anno di Cristo 533°. I cicli 3, ed 11 dell'anno secondo si ripeterono nel 534°, e così via discorrendo i cicli 4 e 12; 5 e 13 ec. dell'anno terzo, quarto ec., corrisposero al 535.°, 536.°, ec. dell'era nostra.

II. Che multiplicando il periodo di 532 per 15, ossia i tre cicli del sole, della luna, e dell'indizione ro-

mana 28, 19, e 15 tra loro, il prodotto 7980 è il numero d' anni che costituiscé il periodo giuliano. In questo come nel precedente dati i numeri dei tre cicli di un anno qualunque, non potranno gli stessi incontrarsi insieme di nuovo se non dopo 7980 anni. Così nel 1624, si ebbe 9 di ciclo solare, 10 di lunare, e 7 d' indizione romana, e non avverranno gli stessi che nel 9604 di G. C. Il detto anno 1624 corrispondendo all' anno del periodo giuliano 6337 questo al pari di quello dee esprimere tutti e tre i numeri 9, 10, 7 dei tre cicli, per modo, che dividendo 6337 successivamente per 28, 19, 15, si avranno i residui respettivi 9, 10, 7, ossia i numeri degli stessi tre cicli che si ebbero per lo anno 1624 di Cristo. Chiamando pertanto H'' un' anno qualunque del periodo giuliano si avrà sempre $\left(\frac{H''}{28}\right)_r = a$, $\left(\frac{H''}{19}\right)_r = b$, $\left(\frac{H''}{15}\right)_r = c$ formole equivalenti alle già date da noi. Le quali cose premesse ecco la soluzione del problema poco davanti accennato, cioè

Date le quantità a, b, c dei tre cicli solare, lunare, indizione romana di un anno H trovare l' anno H'' corrispondente del periodo giuliano... Essendo

$\left(\frac{H''}{28}\right)_r = a$, $\left(\frac{H''}{19}\right)_r = b$, $\left(\frac{H''}{15}\right)_r = c$, si faccia

$\left(\frac{H''}{28}\right)_i = x$, $\left(\frac{H''}{19}\right)_i = y$, $\left(\frac{H''}{15}\right)_i = z$ allora si avrà

$\frac{H''-a}{28} = x$, $\frac{H''-b}{19} = y$, $\frac{H''-c}{15} = z$, e quindi

$H'' = 28\,x + a = 19\,y + b = 15\,z + c$ dove essendo quattro le incognite cioè H'', x, y, z e tre l' equazioni con H'' quantità cercata si conosce essere il pro-

blema indeterminato. Prendendo il valore di y avremo

$$y = \frac{28x + a - b}{19} = x + \frac{9x + a - b}{19} = x + m,$$ laonde

$$x = \frac{19m - a + b}{9} = 2m + \frac{m - a + b}{9} = 2m + n,$$ ed

$m = 9n + a - b$ dunque

$x = 2m + n = 19n + 2a - 2b$; e

$28x + a = 532n + 57a - 56b$ (di cui faremo uso pel gran ciclo pasquale) adunque.

$15z + c = 532n + 57a - 56b$

$$z = \frac{532n + 57a - 56b - c}{15} =$$

$$35n + 3a - 3b + \frac{7n + 12a - 11b - c}{15} =$$

$35n + 3a - 3b + p$, da cui

$$n = \frac{15p - 12a + 11b + c}{7} =$$

$$2p - a + b + \frac{p - 5a + 4b + c}{7} = 2p - a + b + q;$$ e

$p = 7q + 5a - 4b - c$, e $2p = 14q + 10a - 8b - 2c$; ma $n = 2p - a + b + q$, sostituendo pertanto il valore di $2p$ si avrà

$n = 14q + 10a - 8b - 2c - a + b + q$, e riducendo sarà

$n = 15q + 9a - 7b - 2c$, e

$35n = 525q + 315a - 245b - 70c$, ma

$z = 35n + 3a - 3b + p =$

$35n + 3a - 3b + 7q + 5a - 4b - c =$

$35n + 7q + 8a - 7b - c$, dunque sostituito il valore di $35n$ si ottiene

$z = 525q + 315a - 245b - 70c + 7q + 8a - 7b - c$, ossia riducendo

$z = 532\,q + 323\,a - 252\,b - 71\,c$, e finalmente
$H'' = 15\,z + c = 7980\,q + 4845\,a - 3780\,b - 1064\,c$,
dove facendosi successivamente $q = 0$, 1, 2, 3, 4 ec. si troverà bensì un infinità di valori di H'', che differiscono costantemente l'uno dall' altro di 7980, ma sapendo noi *a priori* che il valore di H'' debb' esser positivo, e tale che non sia in opposizione coll' anno dato H, non sarà difficile di supporre q adequatamente. Sappiamo per esempio che l'anno primo dell' era nostra correva l'anno del periodo giuliano 4714, dunque fino all' anno di Cristo 3267 il valore di H'' non dee oltrepassare 7980. Dal 3268 all' 11247 di Cristo i valori di H'' si terranno tra i limiti di 7981 a 15960, e così via via, le quali osservazioni ci conducono senza difficoltà veruna alla giusta supposizione di q.

Sarà forse più comodo ne' tempi futuri, e assai lontani da noi di mantenere i valori di H'' sempre minori di 7981, e tener conto dei periodi giuliani scorsi; tanto più che 7980 anni è un lasso di tempo sul quale non potrà mai nascere equivoco. In tal caso la formola prenderà l'aspetto che viene

$H'' = \left(\frac{7980q + 4845a - 3780b - 1064c}{7980}\right)_r$ la quale potrà agevolmente simplificarsi coll' aggiugnergli la quantità $7980\,b + 7980\,c - 7980\,q$ multipla di 7980, allora si avrà

$H'' = \left(\frac{4845\,a + 4200\,b + 6916\,c}{7980}\right)_r$. Calcolando colla medesima il valore di H'' per lo anno di Cristo 3268 nel quale si avrà $a = b = c = 1$, risulta $H'' = 1$; ossia al primo anno del secondo periodo giuliano. Trovammo già che nell' anno primo di Cristo si ebbe $a = 10$, $b = 2$, $c = 4$. Sostituiti questi valori nell' ultima formola si ha l'anno

del periodo giuliano che gli corrisponde, ossia $H'' = 4714$, ed ecco perchè si è aggiunto 4713 all'anno H, per ottenere cioè l'anno del periodo giuliano corrispondente.

Prendendo ora la quantità $532n + 57a - 56b$ sopra notata, nella quale si contengono i valori di a, b dei cicli solare, e lunare di un anno H, potremo servirci della medesima, correggendola opportunamente, al computo del gran ciclo pasquale corrispondentemente all' istesso anno H nel modo seguente. Sia perciò $n' = 532n + 57a - 56b$, e suppongasi $n' < 533$ come si richiede in un ciclo composto di 532 anni, nel quale non si tien conto de' periodi trapassati, laonde si avrà $n' = \left(\frac{532n + 57a - 56b}{532}\right)_r$, si aggiunga alla medesima la quantità $532b - 532n$ multipla di 532, e si avrà

$$n' = \left(\frac{57a + 476b}{532}\right)_r.$$

Ora essendo $H = 0$, avemmo $a = 1$, $b = 9$ sostituiti questi valori si ha $n' = 457$, ma ad $H = 0$ corrisponde l'anno primo del gran ciclo pasquale, dunque la formola dà 456 anni di troppo. Sottraendo pertanto 456, e chiamando H' l'anno del gran ciclo pasquale si avrà $H' = \left(\frac{57a + 476b - 456}{532}\right)_r$, ed aggiugnendogli 532 avremo l'anno del detto ciclo espresso da

$$H' = \left(\frac{57a + 4766 + 76}{532}\right)_r.$$

Quando si ottenga da qualunque siasi di queste due formole esprimenti i valori di H'', H' e dalle precedenti dei tre cicli, il residuo zero, ciò significa ch'è l'ultimo anno del ciclo, o del periodo, cui esso residuo appartiene, vale a dire uno degli anni 28, 19, 15, 532, 7980 respettivamente.

INDICE

ima che corrisponde alla nota (6).

Valori di *a*.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Valori di *d*.														
16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12
17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13
18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14
19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15
20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16
21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17
22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18
23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19
24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20
25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21
26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22
27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23
28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24
29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25
0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26
1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27
2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28
3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29
4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0
5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1
6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2
7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3
8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4
9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5
10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6
11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7
12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8
13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9
14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10
15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11

ima che corrisponde alla nota (6).

Valori di a.														
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Valori di d.														
16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12
17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13
18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14
19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15
20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16
21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17
22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18
23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19
24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20
25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21
26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22
27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23
28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24
29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25
0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26
1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27
2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28
3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29
4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0
5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1
6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2
7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3
8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4
9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5
10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6
11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7
12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8
13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9
14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10
15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11

ari lunari dal 1 marzo agli 8 aprile,
in fine della nota (17).

7°	18°	19°	20°	21°	22°	23° (av. la Rif.)	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	Giorni del Mese.	Epatte
	8	19		11		3	14		6	17		9		Marz. 1	*
6		8	19		11		3	14		6	17		9	2	XXIX
5	16		8	19		11		3	14		6	17		3	XXVIII
	5	16		8	19		11		3	14		6	17	4	XXVII
3		5	16		8	19		11		3	14		6	5	XXVI
2	13		5	16		8	19		11		3	14		6	25. XXV
	2	13		5	16		8	19		11		3	14	7	XXIV
0		2	13		5	16		8	19		11		3	8	XXIII
	10		2	13		5	16		8	19		11		9	XXII
8		10		2	13		5	16		8	19		11	10	XXI
7	18		10		2	13		5	16		8	19		11	XX
	7	18		10		2	13		5	16		8	19	12	XIX
5		7	18		10		2	13		5	16		8	13	XVIII
4	15		7	18		10		2	13		5	16		14	XVII
	4	15		7	18		10		2	13		5	16	15	XVI
2		4	15		7	18		10		2	13		5	16	XV
1	12		4	15		7	18		10		2	13		17	XIV
	1	12		4	15		7	18		10		2	13	18	XIII
9		1	12		4	15		7	18		10		2	19	XII
	9		1	12		4	15		7	18		10		20	XI
		9		1	12		4	15		7	18		10	21	X
6	17		9		1	12		4	15		7	18		22	IX
	6	17		9		1	12		4	15		7	18	23	VIII
4		6	17		9		1	12		4	15		7	24	VII
3	14		6	17		9		1	12		4	15		25	VI
	3	14		6	17		9		1	12		4	15	26	V
1		3	14		6	17		9		1	12		4	27	IV
	11		3	14		6	17		9		1	12		28	III
		11		3	14		6	17		9		1	12	29	II
	19		11		3	14		6	17		9		1	30	I
	8	19		11		3	14		6	17		9		31	*
		8	19		11		3	14		6	17		9	Apr. 1	XXIX
	16		8	19		11		3	14		6	17		2	XXVIII
	5	16		8	19		11		3	14		6	17	3	XXVII
3	13	5	16	16	8	19	19	11		3	14	14	6	4	25. XXVI
2	2	13	5	5	16	8	8	19	11	11	3	3	14	5	XXV.XXIV
		2	13		5	16		8	19		11		3	6	XXIII
	10		2	13		5	16		8	19		11		7	XXII
		10		2	13		5	16		8	19		11	8	XXI
	··10	·11	12	··13	·14	15	··16	·17	18	·19	20	··21	·22	Valori di *M* corrispondenti ai 30 Calendari.	
	1··	12·	23	4··	15·	26	7··	18·	29	10·	21	2··	13·	Residui di 11 *M* + 11 diviso per 30, corrispondenti ad *M*.	

'ari lunari dal 1 marzo agli 8 aprile, in fine della nota (17).

7°	18°	19°	20°	21°	22°	av. la Rif. 23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	Giorni del Mese	Epatte
	8	19		11		3	14		6	17		9		*Marz.* 1	*
6		8	19		11		3	14		6	17		9	2	XXIX
5	16		8	19		11		3	14		6	17		3	XXVIII
	5	16		8	19		11		3	14		6	17	4	XXVII
3		5	16		8	19		11		3	14		6	5	XXVI
2	13		5	16		8	19		11		3	14		6	25. XXV
	2	13		5	16		8	19		11		3	14	7	XXIV
0		2	13		5	16		8	19		11		3	8	XXIII
	10		2	13		5	16		8	19		11		9	XXII
8		10		2	13		5	16		8	19		11	10	XXI
7	18		10		2	13		5	16		8	19		11	XX
	7	18		10		2	13		5	16		8	19	12	XIX
5		7	18		10		2	13		5	16		8	13	XVIII
4	15		7	18		10		2	13		5	16		14	XVII
	4	15		7	18		10		2	13		5	16	15	XVI
2		4	15		7	18		10		2	13		5	16	XV
1	12		4	15		7	18		10		2	13		17	XIV
	1	12		4	15		7	18		10		2	13	18	XIII
9		1	12		4	15		7	18		10		2	19	XII
	9		1	12		4	15		7	18		10		20	XI
7		9		1	12		4	15		7	18		10	21	X
6	17		9		1	12		4	15		7	18		22	IX
	6	17		9		1	12		4	15		7	18	23	VIII
4		6	17		9		1	12		4	15		7	24	VII
3	14		6	17		9		1	12		4	15		25	VI
	3	14		6	17		9		1	12		4	15	26	V
1		3	14		6	17		9		1	12		4	27	IV
	11		3	14		6	17		9		1	12		28	III
9		11		3	14		6	17		9		1	12	29	II
	19		11		3	14		6	17		9		1	30	I
	8	19		11		3	14		6	17		9		31	*
		8	19		11		3	14		6	17		9	*Apr.* 1	XXIX
5	16		8	19		11		3	14		6	17		2	XXVIII
	5	16		8	19		11		3	14		6	17	3	XXVII
3	13	5	16	16	8	19	19	11		3	14	14	6	4	25. XXVI
2	2	13	5	5	16	8	8	19	11	11	3	3	14	5	XXV.XXIV
		2	13		5	16		8	19		11		3	6	XXIII
	10		2	13		5	16		8	19		11		7	XXII
8		10		2	13		5	16		8	19		11	8	XXI
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Valori di *M* corrispondenti ai 30 Calendari.	
	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	Residui di 11 *M* + 11 diviso per 30, corrispondenti ad *M*.	

arla dopo la. metà della nota (26).

corretti di $\left(\frac{6\,d}{7}\right)_r$ e di $22 + d$

	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51

Valori non corretti di $22 + d$

1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
8	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
7	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
6	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51

ima che corrisponde alla nota (6).

Valori di *a*.														
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Valori di *d*.														
16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12
17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13
18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14
19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15
20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16
21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17
22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18
23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19
24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20
25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21
26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22
27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23
28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24
29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25
0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26
1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27
2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28
3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29
4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0
5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1
6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2
7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3
8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7	26	15	4
9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8	27	16	5
10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9	28	17	6
11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10	29	18	7
12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11	0	19	8
13	2	21	10	29	18	7	26	15	4	23	12	1	20	9
14	3	22	11	0	19	8	27	16	5	24	13	2	21	10
15	4	23	12	1	20	9	28	17	6	25	14	3	22	11

ari lunari dal 1 marzo agli 8 aprile,
in fine della nota (17).

av. la Rif.

7°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	Giorni del Mese.	Epatte
	8	19		11		3	14		6	17		9		*Marz.* 1	.
6		8	19		11		3	14		6	17		9	2	XXIX
5	16		8	19		11		3	14		6	17		3	XXVIII
	5	16		8	19		11		3	14		6	17	4	XXVII
3		5	16		8	19		11		3	14		6	5	XXVI
2	13		5	16		8	19		11		3	14		6	25. XXV
	2	13		5	16		8	19		11		3	14	7	XXIV
0		2	13		5	16		8	19		11		3	8	XXIII
	10		2	13		5	16		8	19		11		9	XXII
8		10		2	13		5	16		8	19		11	10	XXI
7	18		10		2	13		5	16		8	19		11	XX
	7	18		10		2	13		5	16		8	19	12	XIX
5		7	18		10		2	13		5	16		8	13	XVIII
4	15		7	18		10		2	13		5	16		14	XVII
	4	15		7	18		10		2	13		5	16	15	XVI
2		4	15		7	18		10		2	13		5	16	XV
1	12		4	15		7	18		10		2	13		17	XIV
	1	12		4	15		7	18		10		2	13	18	XIII
9		1	12		4	15		7	18		10		2	19	XII
	9		1	12		4	15		7	18		10		20	XI
7		9		1	12		4	15		7	18		10	21	X
6	17		9		1	12		4	15		7	18		22	IX
	6	17		9		1	12		4	15		7	18	23	VIII
4		6	17		9		1	12		4	15		7	24	VII
3	14		6	17		9		1	12		4	15		25	VI
	3	14		6	17		9		1	12		4	15	26	V
1		3	14		6	17		9		1	12		4	27	IV
	11		3	14		6	17		9		1	12		28	III
		11		3	14		6	17		9		1	12	29	II
	19		11		3	14		6	17		9		1	30	I
	8	19		11		3	14		6	17		9		31	.
		8	19		11		3	14		6	17		9	*Apr.* 1	XXIX
	16		8	19		11		3	14		6	17		2	XXVIII
	5	16		8	19		11		3	14		6	17	3	XXVII
3	13	5	16	16	8	19	19	11		3	14	14	6	4	25. XXVI
2	2	13	5	5	16	8	8	19	11	11	3	3	14	5	XXV.XXIV
		2	13		5	16		8	19		11		3	6	XXIII
	10		2	13		5	16		8	19		11		7	XXII
		10		2	13		5	16		8	19		11	8	XXI
	..	.		..	.		..	.		.		..	.		
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Valori di *M* corrispondenti ai 30 Calendari.	
	1	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	Residui di 11 *M* + 11 diviso per 30, corrispondenti ad *M*.	
	..	.		..	.		..	.		.		..	.		

arla dopo la metà della nota (26).

corretti di $\left(\frac{6\,d}{7}\right)_r$ e di $22 + d$

2	$\overset{5}{33}$	$\overset{2}{34}$	$\overset{1}{35}$	$\overset{0}{36}$	$\overset{6}{37}$	$\overset{5}{38}$	$\overset{4}{39}$	$\overset{3}{40}$	$\overset{2}{41}$	$\overset{1}{42}$	$\overset{0}{43}$	$\overset{6}{44}$	$\overset{5}{45}$	$\overset{4}{46}$	$\overset{3}{47}$	$\overset{2}{48}$	$\overset{1}{49}$	$\overset{0}{50}$	$\overset{6}{51}$
Valori non corretti di $22 + d$																			
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
8	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
7	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
6	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29	30
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28	29
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27	28
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26	27
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25	26
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24	25
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23	24
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22	23
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	22
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51

della quale si parla alla nota (26).

Valori corretti di $22 + d + e$

9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
4	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
5	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
4	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
5	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
4	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
5	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
4	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
5	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
4	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
5	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
4	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
5	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
5	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
9	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
4	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56